『集合と論理』

目次

1 集合

いくつかのものをひとまとめにして考えた「ものの集まり」を考えることができるが，それだけでは集合というには不十分である。たとえば，普通の言葉遣いでは，「十分大きな自然数の全体の集まり」ということがある。しかし，何をもって「十分大きい」と判断するかがはっきりしていない。このように範囲が明確でない「ものの集まり」は数学的には集合とはいわない*1。

定義 1 (集合) 集合とは，「ものの集まり」であることに加えて，どんなものをとってきても，それがその集まりの中にあるかないかがはっきり定まっているものをいう。□

はっきりしたものの集まり（集合）では，あるものがその中にあるかないかは二者択一である。一方，「ものの集まり」では，われわれの普通の用語法として，あるものがその中に含まれたり含まれなかったり場合に応じてあいまいになったりなったりする。このようなあいまいさを「集合」では排除する。ただし，ある要素（「元」という）がその集合に含まれるかどうかを定める規則があるというだけで，その判定が容易であるかどうかについては何

---

*1 赤 (せき) 摂也 [ss96]

表 1　ならばの真偽値表

	A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A \vee B$	$A \Leftrightarrow B$
#1	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
#2	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
#3	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$
#4	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$

も言及していない。また，集合に先立って規則の正否を判定する論理が，決まっていなくてはならない。

例：　N :自然数全体の集合，Z :整数全体の集合，Q :有理数全体の集合，R :実数全体の集合。

2　命題と論理

命題「P ならば Q」を $P \Rightarrow Q$ と書き，「P または Q」を $P \vee Q$，「P かつ Q」を $P \wedge Q$，P の否定を $\neg P$，真を $\top$，偽を $\bot$ と書くことにする。

命題 $P \Rightarrow Q$ と命題 $\neg P \vee Q$ の真偽値は完全に一致する。つまり，P が偽なら，Q の真偽に関わらず $P \Rightarrow Q$ は真である[*2] [hm93, p.8][sm97, p.400]。

命題 $P \Rightarrow Q$ に対して，次のように定義する。

逆　$Q \Rightarrow P$,

裏　$\neg P \Rightarrow \neg Q$,

対偶　$\neg Q \Rightarrow \neg P$

元の命題が真ならば，対偶も真である。しかし，逆と裏は必ずしも真ではない。

[*2] そう約束するんだからね！

命題 $P \Rightarrow Q$ が真であるとき，「P は十分条件，Q は必要条件」である。正確には，P は Q であるための十分条件であり，Q は P であるための必要条件である，という。

二つの論理式 P と Q が，見かけは違っても，構成要素のすべての真偽値の組み合わせに対して，同じ真偽値を持つとき，$P \equiv Q$ と書くことにする。すると，次の法則が成り立つ。それは真偽値表を作ってみれば確認できる [sm97, p.399]。

$\neg\neg A \equiv A$ （二重否定の法則） (1)

$(\neg A) \vee A$ は常に真である。 （排中律） (2)

$(\neg A) \wedge A$ は常に偽である。 （矛盾律） (3)

$A \vee A \equiv A, \quad A \wedge A \equiv A$ （冪等律） (4)

$A \vee B \equiv B \vee A$ （交換律 1） (5)

$A \wedge B \equiv B \wedge A$ （交換律 2） (6)

$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$ （結合律 1） (7)

$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$ （結合律 2） (8)

$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ （分配律 1） (9)

$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ （分配律 2） (10)

$\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$ （ド・モルガンの法則 1） (11)

$\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$ （ド・モルガンの法則 2） (12)

$A \rightarrow B \equiv (\neg B) \rightarrow (\neg A)$ （対偶の法則） (13)

対偶の法則は，二重否定の法則と・モルガンの法則による。

三段論法 命題 $A \Rightarrow B$ で，前提が $A = \top$ かつ $(A \Rightarrow B) = \top$ ならば，結論として $B = \top$ を得る。（$\because$ 表 1 の#1 による。）

背理法 ある命題 A が真であることを証明したいとする。仮に A 偽としたならば，$\neg A \Rightarrow B$ と $\neg A \Rightarrow (\neg B)$ の両方が真（矛盾！）であることを

導けたら，A は真であると結論する。（∵ 表 1 の#3 と#4 による。）

背理法の古い説明（記号論理を使った分かり難い説明）：背理法により命題 B 真を導く，後で示すように，命題 $X = ((\neg B) \Rightarrow (C \wedge \neg C)) \Rightarrow B$ が恒真（トートロジー）であり，しかも，命題 X の前提である命題 $Y = \neg B \Rightarrow (C \wedge \neg C)$ が真であることが背理法で矛盾が導けたことにより，明らかとなっている。したがって，X と Y が両方とも真なら，X の結論である B も真でなければならない（三段論法による）。

ここで命題 $X = ((\neg B) \Rightarrow (C \wedge \neg C)) \Rightarrow B$ が恒真であることを示す。ただし，下記の (*) は $X \Rightarrow B \equiv \neg X \vee B$ と $C \wedge \neg C \equiv \perp$ による。

$$
\begin{aligned}
((\neg B) \Rightarrow (C \wedge \neg C)) \Rightarrow B &\equiv \neg(B \vee \perp) \vee B \qquad (*) \\
&\equiv \neg B \vee B \\
&\equiv \top
\end{aligned}
$$

■

背理法：$\sqrt{2}$ が無理数（有理数でない）ことの証明[*3]

数学的帰納法：[*4]

3 写像

二つの集合 X, Y のそれぞれの元 x, y の関係は，図 1 のようになっている。この図を参照して以下の定義 [*5]を理解するとよい。

① **関係** ⇔ 変数 x, y を命題 $R(x, y)$ に代入したとき真か偽のどちらか一方に定まるとき，$R(x, y)$ を関係（または 2 項関係）という [sug85, 項目 57]。

注 1：「関係」では，X から Y という「向き」がない。

② **対応** ⇔ 直積集合 $X \times Y$ の部分集合 G に対して，$\Gamma(G, X, Y)$ を X から Y への対応という。このとき，X を Γ の始集合，Y を Γ の終集合とい

[*3] 探し中！

[*4] 例題探し中！！

[*5] 松阪：「集合・位相入門」。読まないほうがいいぞ。

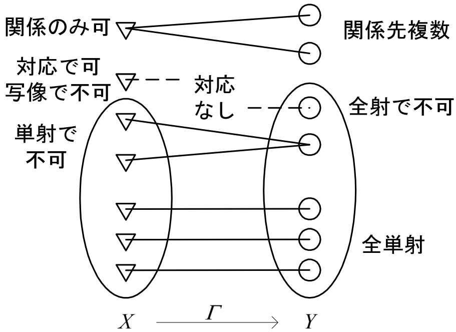

図 1　二つのものの関係のイメージ

う [sug85, 項目 57B]⇔ ある規則によって，X の各元 x に対してそれぞれ一つづつ Y の部分集合 が定められているとき，その規則 を X から Y への対応という [松阪 p.23]。

注 1：「対応」では，X から Y という「向き」がある。

注 2：一つの x に二つ以上の Y の部分集合を関係づけることは不可。

注 3：X の中に対応先のない元があってもよい。すなわち，$\Gamma(x) = \emptyset$ は可。

注 4：$x \neq x'$ に対して $\Gamma(x) = \Gamma(x')$ も可。

③ **写像**　⇔ X の任意の元 x に対して Y のただ一つの元からなる集合 が定められているとき，その規則 を X から Y への写像という [松阪 p.27]。（X から Y の中への写像 [松阪 p.33]）

注 1：一つの x に二つ以上の Y の元を関係づけることは不可。

④ **全写像　（全射，上への写像）**　⇔ 値域 $\Gamma(X)$ が Y に等しい，$\Gamma(X) = Y$。⇔ 任意の $y \in Y$ に対して，$\Gamma(x) = y$ となる $x \in X$ が少なくとも一つ存在する。

⑤ **単射　(単射，1:1 の写像）**　⇔ 任意の $x \in X$ に対して，$x \neq x' \Rightarrow \Gamma(x) \neq \Gamma(x')$。⇔ 任意の $x \in X$ に対して，$\Gamma(x) = \Gamma(x') \Rightarrow x = x'$ 。⇔（任意の $y \in Y$ ではなく）任意の $y \in \mathrm{Im}(\Gamma(X))$ の逆像 $\Gamma^{-1}(y)$ が X のただ一

つの元を含む。

⑥ **全単射**　（1:1 **の対応，**cf.⑤）　全射かつ単射のとき，全単射という。

定理 1 逆対応が写像になるための必要十分条件は，元の写像が全単射であること。□

参考文献

[hm93] 萩谷昌己. 論理と計算. 岩波講座 応用数学 基礎 11. 岩波書店, 1993.

[sm97] 杉浦光夫. 解析入門 I. 基礎数学 2. 東京大学出版会, 1980.(1997).

[ss96] 赤摂也. 集合論入門. 新数学シリーズ 1. 培風館, 1957.(1996).

[sug85] 日本数学会編. 岩波数学辞典. 岩波書店, 第 3 版, 1985.