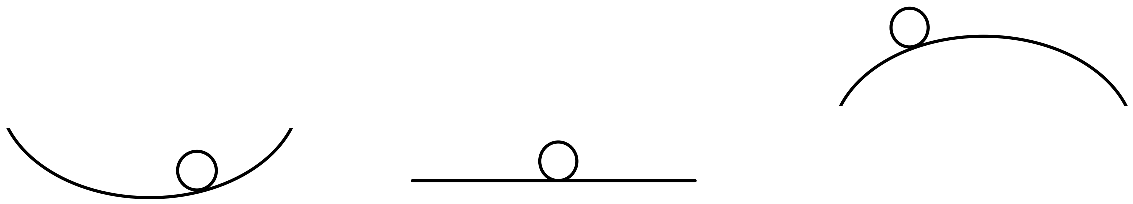
2　動的システムの安定性と過渡応答

2.1 力学系の安定性

直感が働き易いという理由で，図 2.1 の曲面上のボール（力学系）の挙動を考えて，安定・不安定の意味を考えよう。



(a)凹面　　(b)平面　　(c)凸面

図 2.1　曲面上のボールの挙動

図 2.1 で，ボールと曲面の間に摩擦があるとすれば，次のことが分かる。

図(a) ボールは底で止まる。　＝＞　この系は安定。
図(b) ボールは動かない。　　＝＞　安定と考えてよさそう。
図(c) ボールは面から落ちる。＝＞　この系は不安定。

これを一般化して安定・不安定を定義する。力学系が安定であるとは，最初に定めれられた領域 A にあったものが十分時間がたっても A 内に留まることを指す。不安定とは，十分時間がたつと A の外へ出て行き放しになることを指す。

さて，図(a)の場合に最終的にボールは凹面の底で止まる理由はなにか。摩擦のためボールの力学的エネルギー（運動エネルギー＋位置エネルギー）が時間とともに減少し，ついには 0 になるからである。（なお，ボールにエンジンは内臓されていないとする。）

実は，この場合の力学的エネルギーが，いわゆるリアプノフ関数に相当する。力学的エネルギー（リアプノフ関数）が時間とともに減少すれば，そのシステムは安定であると言って差し支えない。ていねいにいうと，リアプノフ関数とは，あるシステムで負にならずに，かつ，時間とともに発散しないものことである。したがって，リアプノフ関数が見つかればそのシステムは安定である。これをリアプノフの安定理論[1]という。なお，上の図(b)に比べて，図(a)は安定の度合いが大きく必ず凹面の底でボールが止まるから漸近安定と呼ばれる。

2.2 状態方程式とその解

ここでは，状態微分方程式の解の(2)を示す。次節で時間的な挙動を調べるための準備である。

線形時不変なシステムの状態方程式は,

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t)&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)&=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(1)$$

であり，初期値を $\boldsymbol{x}(0)$ とすれば，その解 $\boldsymbol{x}(t)$ は

$$\boldsymbol{x}(t)=\varepsilon^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t\varepsilon^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau\quad\cdots\cdots(2)$$

である[2]。実際に(2)を時間で微分すれば(1)を満たすから，正しいことが分かる。なお，$\varepsilon^{\boldsymbol{A}t}$ は状態推移行列と呼ばれいろいろな計算法がある。しかし，それは後の離散時間系の章で説明する。それまでは，普通の指数関数と同じ計算ができると思っておいてよい。

[1] 適当な制御の教科書を参照。たとえば，小郷，美多：「システム制御理論入門」, p.79, 実教出版(1981)。
[2] たとえば，小郷，美多：「システム制御理論入門」, p.63, 実教出版(1981)。

2.3 解の挙動と極，そして安定性

(1)で制御入力$\boldsymbol{u}(t)=0$の場合を自由システムといい，すべての初期値$\boldsymbol{x}(0)$に対して

$$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t)=0 \quad \cdots\cdots (3)$$

となるとき漸近安定という。

自由システムが漸近安定であるための必要十分条件は，$\boldsymbol{A}$のすべての固有値の実部が負：

$$\mathrm{Re}\{\lambda_i(\boldsymbol{A})\}<0 \quad (\forall i) \quad \cdots\cdots (4)$$

である。なぜならば，$\boldsymbol{u}(t)=0$のときの解は(2)から求まり，さらに次のように変形できる[1]。

$$\boldsymbol{x}(t)=\varepsilon^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{T}\begin{bmatrix}\varepsilon^{\lambda_1 t} & & & \\ & \varepsilon^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varepsilon^{\lambda_n t}\end{bmatrix}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}(0) \quad \cdots\cdots (5)$$

ここで，行列$\boldsymbol{T}$は$\boldsymbol{A}$を（対角線上に各固有値が並ぶ）対角行列に変換する一定な行列である。よって，次の必要十分関係が成り立つ。

漸近安定の定義(3)が成り立つ
⇔上式の第 3 辺がどのような初期値$\boldsymbol{x}(0)$に対しても$t\to\infty$のとき 0 となる
⇔第 3 辺の大きな行列の各項が $t\to\infty$のときそれぞれ 0 となること
⇔ (4)が成り立つ。■

2.4 システム行列の固有値と伝達関数の極

ここでは，状態方程式から伝達関数を導き，伝達関数の極とシステム行列$\boldsymbol{A}$の固有値が同じであることを示す。

まず，状態方程式から伝達関数を導こう。(1)の第 1 式をラプラス変換すれば次式となる。

$$s\boldsymbol{X}(s)-\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{AX}(s)+\boldsymbol{BU}(s)$$

これを$\boldsymbol{X}(s)$について解き，伝達関数を求めるため初期値$\boldsymbol{x}(0)=0$とし，(1)の第 2 式を使えば

$$\boldsymbol{Y}(s)=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{BU}(s)$$

となる。上式から，$\boldsymbol{U}(s)\to\boldsymbol{Y}(s)$の伝達関数行列$\boldsymbol{G}(s)$は次式となる。

$$\boldsymbol{G}(s)=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}=\frac{\boldsymbol{C}\mathrm{adj}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}}{\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})} \quad \cdots\cdots (6)$$

次に，伝達関数の極はシステム行列$\boldsymbol{A}$の固有値と同じであることを示そう。伝達関数の極は，伝達関数の分母=0 の根であるから，(6)の第 3 辺の分母=0 とすれば,

$$\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=0 \quad \cdots\cdots (7)$$

を満たすsが極である。しかるに，上式は$\boldsymbol{A}$の固有値が満たす固有方程式である。したがって，極と固有値は同じものである。

演習　「伝達関数が安定である条件はすべての極がラプラス平面の左半平面にあること」を示せ。
（ヒント）伝達関数の極と$\boldsymbol{A}$の固有値は同じもので，安定条件は(4)である。
◇

2.5 伝達関数の極と零の性質

せっかく伝達関数$G(s)$の極が出てきたから，ついでに極と零の性質を説明する。（以下のこと

---

[1] たとえば，中野，美多：「制御基礎理論」, p.126, 昭晃堂 (1992.1)，または，小郷，美多：「システム制御理論入門」, p.63, 実教出版(1981)

は安定性と関係はないが，知っていれば得である。）1 入力 1 出力システムの伝達関数を

$$G(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{\beta_n s^n+\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots\beta_1 s^1+\beta_0}{s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\cdots\alpha_1 s^1+\alpha_0}$$

とするとき, 上式第 3 辺の分母または分子を 0 とした方程式の根が, それぞれ極 λ_i と零 z_i である。次の性質を示すことができる。

極 λ_i： G(s)にインパルスを入力すると，出力に $\varepsilon^{\lambda_i t}$ という成分が出てくる。すなわち，極に対応する成分は，伝達関数をちょっとひっぱたけば出てくる。

零 z_i：$\varepsilon^{z_i t}$ という信号を入力に加えても，それに対応する成分は出力に出ないてこない。すなわち，零に対応する成分はブロックされて伝達関数を通らない。

さらに，フィードバックでは極は動かせるが，零は動かせない。したがって，零を動かすためには，新しいブロックを追加するしかない。

演習　上の極と零の性質を示せ。
（ヒント）極の性質：簡単のため極はすべて実数で重複はないものとすると, 伝達関数は, 次のように部分分数に分解できる。

$$Y(s)=G(s)U(s)=\left\{\frac{K_1}{s-\lambda_1}+\frac{K_2}{s-\lambda_2}+\cdots+\frac{K_n}{s-\lambda_n}\right\}U(s)$$

入力がインパルスなら $U(s)=1$ として，上式を逆ラプラス変換すれば

$$y(t)=K_1\varepsilon^{\lambda_1 t}+K_2\varepsilon^{\lambda_2 t}+\cdots+K_n\varepsilon^{\lambda_n t}$$

となって，上の極の性質が分かる。次に，零の性質：入力信号 $u(t)=\varepsilon^{z_i t}$ のラプラス変換は $U(s)=\dfrac{1}{s-z_i}$ だから，それを G(s)に加えると出力は,

$$Y(s)=\frac{N(s)}{D(s)}\frac{1}{s-z_i}=\frac{(s-z_i)\tilde{N}(s)}{D(s)}\frac{1}{s-z_i}=\frac{\tilde{N}(s)}{D(s)}$$

となる。上式最後の分子分母に共通因子がなければ， $\varepsilon^{z_i t}$ に対応する極がない。・・・
◇

演習　フィードバックでは極は動かせるが，零は動かせない，ということを示せ。
（ヒント）$G(s)=N(s)／D(s)$の出力を-K でフィードバックした系の伝達関数は次式である。

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{N(s)}{D(s)+KN(s)}$$

◇

2.6 ナイキストの安定判別法への補足

まず，ナイキストの安定判別法をちょっとだけ復習をして問題点を明らかにしておこう。

ナイキストの安定判別法とは, 開ループ伝達関数が安定のときは, 次のものである。「 図 2.2(a)の負帰還制御系の開ループ伝達関数 $G(j\omega)H(j\omega)$ の軌跡が ω:0 $\to\infty$ としたとき，図 2.2(b)の実線のように点(-1+0j)を左に見れば安定であり，破線のように右に見れば不安定である。」この証明は次の方針で行なう。次の関係が同値であることを複素積分の知識を使って示す[1]。

閉ループ伝達関数の分母式 $1+G(s)H(s)=0$ の根が複素左半平面にある（安定条件）

⇔ ω:0 $\to\infty$ としたときナイキスト軌跡が点(-1+0j)を左に見る。

上の方針は安定極の観点からは理解しやすいが，次の点がなんとなく分かりにくい。

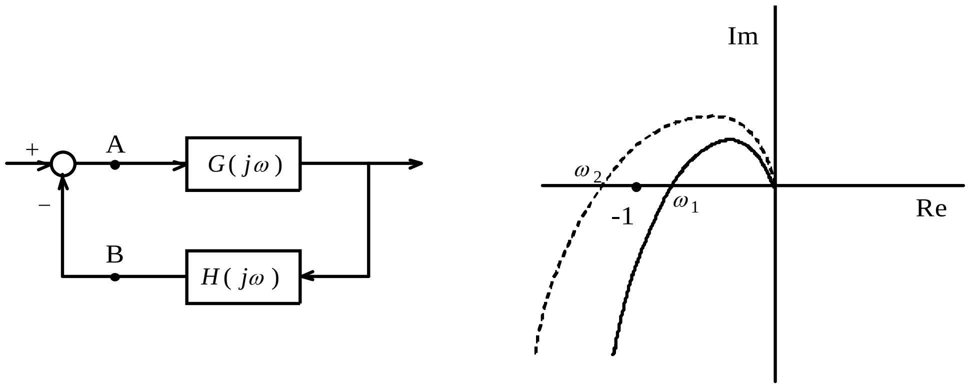
[1] 古典制御の教科書にはたいてい書いてある。たとえば，堀，大西：「制御工学の基礎」，pp.68-73，丸善 (1997.9)

- なぜ，閉ループでなく開ループの伝達関数の評価でよいのか？
- なぜ，点(-1+0j)が特別視されるのか？

演習　先に進む前に，次の詐欺師の例について考えよ。
ある詐欺師は，お金を貸すとそれを k（実数）倍して返してくれる。この詐欺師とお金のやり取りしたとき損得の境目の条件は何か？　何度も繰り返すとどうなるか？
◇

上の疑問に答えるため，図.2.2(a)の負帰還閉ループ系の安定性を以下のようにして調べる。目標入力が 0 で，A 点に単位インパルスを入力したときの挙動を考えよう。単位インパルスは，すべての角周波数成分を含む正弦波の和（フーリェ級数）に展開できる。 A 点に入力されたいろいろな角周波数成分の正弦波は，A 点→B 点の周波数応答特性によって，振幅がゲイン倍され，かつ，位相がずれて B 点に出力される。B 点の正弦波信号のうち，位相遅れが 180° となる角周波数成分に注目しよう。図 2.2(b)でいえば，ナイキスト軌跡が負の実軸（位相遅れが 180° ）を通るときの角周波数 ω_1，ω_2 である。位相が 180° ずれていると，正弦波信号の正負が反転する。図 2.2(a)では，B 点→A 点に戻すときにもう 1 回正負反転する。結局，A 点に入力された単位インパルスのうち上の角周波数の信号は，2 回正負反転されて（つまり正負は変わらずに）再び A 点に戻ってくる。このように，ループを一巡りだけしたときの様子を調べるには，閉ループではなく開ループ伝達関数を評価しておけばよい。

次に，ループを閉じたときのことを考える。（信号がぐるぐる巡るからといって，目を回さないように！）ここでも，位相遅れが 180° となる角周波数成分に注目する。この信号は A 点を出発して，振幅が開ループのゲイン倍されて戻ってくる。（ただし，上のことから正負は同じ。）この信号をさらにもう 1 回ループを巡らせ，さらにもう 1 回・・・と繰り返す。つまり，位相遅れが 180° となる角周波数の正弦波がぐるぐる巡る。（すなわち，上の演習の詐欺師とのやり取りと同じことをする。）このとき，開ループゲインが 1 より小さいと振幅が減少し閉ループ系は漸近安定になり，ゲインが 1 より大きいと振幅が次第に増大し閉ループ系は発散不安定になる。もし，ナイキスト軌跡が点(-1+0j)を通れば，位相遅れが 180° のとなる角周波数の開ループゲインが 1 である。よって，その角周波数の信号は増減せずに持続振動することになる。すなわち，点(-1+0j)は，閉ループ系の安定と不安定の境目になっている。



(a)　　　　(b)

図 2.2