

3 状態フィードバックによる極配置

3.1 この章の位置づけ

この章は、次章でオブザーバを導入することを合理化するために設けた。すなわち、前章で、極（固有値）がシステムの挙動を主に支配していることを示した。その極を自由自在に移動できる条件をこの章で示す。ただし、それを行なうには全状態変数を検出しなければならない。しかし、センサからは一部の状態変数しか検出できないことがある。したがって、そのような場合に、全状態変数を復元するオブザーバが必要となるのである。オブザーバについては、次章で述べる。

3.2 極配置の可能条件

次の線形時不変なシステム

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

において、全状態 $\mathbf{x}(t)$ が検出できているとして制御入力 $\mathbf{u}(t)$ を

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{F}\mathbf{x}(t) \dots\dots\dots(2)$$

と定める。これを状態フィードバックという。状態フィードバックを行った閉ループ系の方程式は、(1)の第1式に(2)を代入して、

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F})\mathbf{x}(t) \dots\dots\dots(3)$$

となる。このとき、閉ループ系の極、すなわち、 $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F})$ の固有値を任意の位置に移動できるための必要十分条件は、システム行列 \mathbf{A} が可制御であることである¹。したがって、状態フィードバックで極の移動を自由にするために全状態の検出が必要となる。

3.3 おまけ：謎の数列 1, 2, 5, 10, ...

上の数列を、どこかでみたような気がしないだろうか？ 必ず出会っている。

そう、1, 2, 5, 10, ... は、オシロスコープなどの測定器のレンジ設定の系列である。

問 測定器のレンジ設定の系列が、1, 2, 5, 10, ... となっている理由は？

(ヒント) それぞれの比を求めてみよ。

2倍ずつなら 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... となるが、この系列は10進法に慣れた我々の日常生活にはなじまない。10進1桁上がる毎に繰り返さないからである。この系列は、コンピュータと麻雀の御用達のようだ。(いわゆる「倍半分の法則²」はこの系列である。)

例は多くないが、1, 3, 10, ... という系列も使われている。たとえば、ものさしの長さである。

この調子でゆくと次の系列は 1, 10, 100, ... で、10進法ではこれでおわりである。

ところで、システムの設計でとりあえず数値を一つ決めないといけないことがある。たとえば、デジタル制御系のサンプリング周期などである。できるだけ短くすればよいというだけで、特別に明確な設計指針がない。こういうときに役に立つのが、「10倍則(あるいは1/10則)」である。とりあえずサンプリング周期を欲しい応答時間のおよそ1/10にするのである。10倍も離れていればおそらく大丈夫というのが根拠である。10bitのA/Dコンバータを使うのは、 $2^{10}=1024$ 、ほぼ0.1%の精度だからである。8bitのA/D、D/Aを使うのは安価だからである。明確な理由もないのに、12bit (=0.025%) はやりすぎと思うのは、貧乏人のひがみだろうか？

¹ たとえば、小郷、美多：「システム制御理論入門」, p.116-118, 実教出版(1981)。

² とりあえずパラメータを「エイヤー！」と倍・半分にしてみても、3点で傾向をみることに。