1　なぜフィードバック制御が使われるのか

1.1 制御の目的とフィードバック

フィードバックは，制御対象に関する我々の知識の不完全さに対処するただ一つの方策であり，同時に知識の不完全さを補い得る有効な方策である[1]。これを以下に説明する。

制御とは，ある目的に適合するように必要な操作を対象に加えることである。制御の目的が目標値への追従ならば，図 1.1 のシステムにおいて制御系の目標値 r から制御量 y への伝達関数を１にすることである。しかし，これだけならフィードフォワード制御でも可能である（後で図 1.2(b)のところで述べる）。フィードバックの本質とは何だろうか？

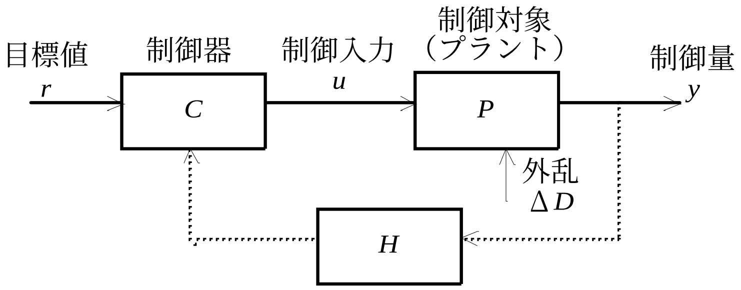


図 1.1　制御系の構成

そこで，次のように波線部を追加して考えてみる。すなわち，外乱があっても制御系の目標値から制御量への伝達関数を１にできるであろうか？これは，フィードフォワード制御系では実現できない。なぜならば，外乱はいつ・どのくらいの大きさで入るか事前には分からないから，そのような（未知）外乱のことを制御器が知っている筈はなく対策できない。したがって，外乱の影響がそのまま制御量に出てしまい，伝達関数は１にならない。

このような未知外乱への対応策がフィードバック制御である。すなわち，外乱が入れば制御量に影響が出る。それを見てから制御入力に修正を加えれば，制御量へ現れる外乱の影響を抑制できる。これがフィードバック制御の基本的な考え方である。事前に知ることができない外乱に対しては，フィドードバックが唯一の方策である。しかし，制御入力の修正（対策）が後手に回り，安定性に問題を生じることもある。

1.2 制御系の感度

外乱の影響を一般的に考察するために，「感度」という考え方を導入しよう。図 1.1 の制御系において，外乱 ΔD が加えられたとき制御特性が ΔC だけ変動した場合について考える。我々は「感度」という言葉からおよそ次のような感じをもっている。

・ΔD が小さくても，ΔC が大きければ，感度は大きい。
・ΔD が大きくても，ΔC が小さければ，感度は小さい。

このことから，感度を

$$\text{感度} = \Delta C / \Delta D \qquad (1)$$

と定義してもよさそうに思われる。しかし，うまくゆかない場合がある。たとえば，太平洋に塩 1kg（外乱）を投入しても，海水の塩辛さ（特性）はほとんど変わらない。これを精密化して，外乱と制御特性の関係を考えてみよう。すなわち，制御系の特性を $f(a_1,a_2,a_3,\cdots)$ とし，パラメータ a_1 が Δa_1 だけ変動した場合を考える。もし，$a_1 \to a_1 + \Delta a_1$ となっても a_1 がもともと大きければ，その結果生じる特性の変動 Δf は相対的に小さくなる。したがって，上式の感度の定義では，パラメータの大小の影響を受け，特性変動の数量的な比較が難しいという欠点がある。

上記の欠点を除くため，Δf と Δa_1 をそれぞれ f と a_1 で正規化して比を作る。すなわち，

[1] 計測自動制御学会：「自動制御ハンドブック」，p.465

$$S = \frac{\Delta f}{f} \bigg/ \frac{\Delta a_1}{a_1} \quad \cdots\cdots (2)$$

を考える。感度 S が 1 のときは外乱の%変動と制御特性の%変動が等しく，S が 1 以下のときは外乱に対して制御特性が変化しにくいことを意味する。上式の感度を，相対感度（または，パラメータ感度）という。さらに，(2)で $\Delta a_1 \to 0$ の場合を考えると，

$$S_0 = \frac{\partial f}{f} \bigg/ \frac{\partial a_1}{a_1} = \frac{\partial(\ln f)}{\partial(\ln a_1)} \quad \cdots\cdots (3)$$

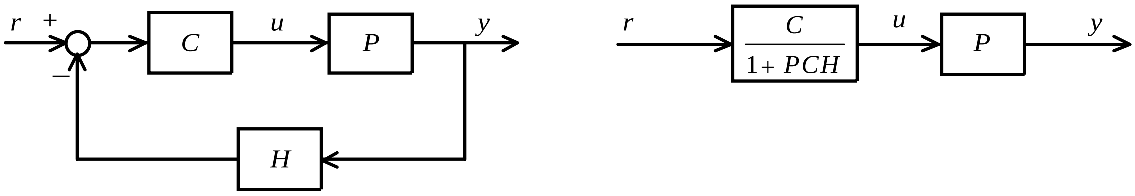
となる。これを微分感度という。

1.3 フィードバック制御系の感度

ここでは, 図 1.2(a)のフィードバック制御系の相対感度および微分感度を求める。ただし, $r \to y$ の伝達関数 T

$$T \equiv \frac{y}{r} = \frac{PC}{1+PCH} \quad \cdots\cdots (4)$$

を制御系の特性とし， $P \to P + \Delta P$ となったときの特性 T の変動を ΔT とする。



(a) (b)

図 1.2

演習　図 1.2(a)に対して次の各式が成り立つことを示せ。

(a) $$\Delta T = \frac{\Delta P}{1+(P+\Delta P)CH} \cdot \frac{T}{P} \quad \cdots\cdots (5)$$

(b) $$S \equiv \frac{\Delta T}{T} \bigg/ \frac{\Delta P}{P} = \frac{1}{1+(P+\Delta P)CH} \quad \cdots\cdots (6)$$

(c) $$S_0 = \frac{1}{1+PCH} \quad \cdots\cdots (7)$$

◇[1]

上の(7)から，微分感度 S_0 を小さくするにはループゲイン PCH を大きくすればよいことが分かる。また，(6)を変形して，

$$\frac{\Delta T}{T} = S \frac{\Delta P}{P} \quad \cdots\cdots (8)$$

[1] 演習のおわりを示す。ちゃんとやったらチェックしよう！

であるから，相対感度 S の絶対値が 1 より小さければ，パラメータの%変動より特性の%変動を小さくできることが分かる。

1.4 フィードフォワード制御系の感度

ここでは，図 1.2(a)と同じ伝達関数をもつ図 1.2(b)のフィードフォワード制御系の感度を計算し，フィードバック制御系と比較する。

演習　以下の各項を確認せよ。

(a) 図 1.2 の(a)と(b)では，$r \to y$ の伝達関数 T が等しい。

(b) 図 1.2(a)のフィードバック制御系で $P \to P + \Delta P$ となったとき，出力の変動 Δy_B は次のようになる。

$$\Delta y_B = \frac{\Delta PC}{\{1 + (P + \Delta P)CH\}(1 + PCH)} r \quad \cdots\cdots (9)$$

(c) 図 1.2(b)のフィードフォワード制御系では，プラントが $P \to P + \Delta P$ となってもコントローラの中の P は変化しないことに注意すれば，出力の変動 Δy_F が次式となる。

$$\Delta y_F = \frac{\Delta PC}{1 + PCH} r \quad \cdots\cdots (10)$$

◇

上記の(9)と(10)を比較して，(6)を使えば，

$$\Delta y_B = S \Delta y_F \quad \cdots\cdots (11)$$

となる。この式から，閉ループ系の出力変動は，開ループ系の出力変動に相対感度 S を乗じたものである。したがって，$|S| < 1$ とできれば，開ループ系に比べ閉ループ系の出力変動を小さくできることが分かる。普通，フィードバック制御系でループゲイン PCH を大きくするのは，(7)から分かるように $|S| < 1$ としたいからである。

1.5 外乱および検出ノイズの影響と感度

制御系には，図 1.3 に示すように，外乱 d だけでなく検出ノイズ n がつきものである。この時，外乱抑圧と検出ノイズ抑圧の間に(17)の関係があり，ジレンマに陥ることを以下に示そう。

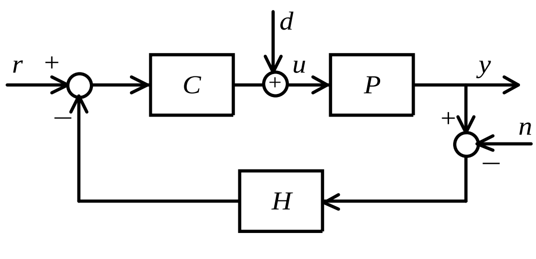


図 1.3

演習　図 1.3 においてループゲイン $L = PCH$ とすれば，次式が成り立つことを示せ。

(a) $$T_{ry} \equiv \frac{y}{r} = \frac{PC}{1 + L} \quad \cdots\cdots (12)$$

(b) $$T_{dy} \equiv \frac{y}{d} = \frac{P}{1 + L} \quad \cdots\cdots (13)$$

(c) $T_{ny} \equiv \dfrac{y}{n} = \dfrac{L}{1+L}$ ……(14)

(d) 微分感度 S_0 は(7)に注意すれば， $S_0 = \dfrac{1}{1+L}$ ……(15)

(e) $T_{dy} = S_0 P$ ……(16)

(f) $S_0 + T_{ny} = 1$ ……(17)

◇

実は，上の最後の結果(17)がジレンマを示しているのである。外乱の影響を小さくするため(13)の T_{dy} を小さくすると(16)から S_0 も小さくなる。すると，(17)からノイズの影響 T_{ny} が大きくなってしまう。逆に，ノイズの影響 T_{ny} を小さくすれば，外乱の影響 T_{dy} が大きくなってしまう。

このジレンマは，図 1.3 の系でフィードバック経路の H にローパス特性を持たせても逃れられない。確かに， H にローパス特性を持たせれば高周波数領域では L が小さくなり，(14)からノイズの影響を小さくできる。ところが，それには代償がある。すなわち，L が小さくなると(15)から S_0 が大きくなり，その結果(16)から外乱の影響が大きくなってしまうのである。そこで，すべての周波数領域で外乱抑圧とノイズ抑圧の両方を同時に達成することをあきらめる。普通は低周波領域では外乱抑圧を重視し，高周波領域ではノイズ抑圧を重視するというようにする。

ここで，もっと進んだ制御理論すなわち H_∞制御と(17)との関係を少しだけ述べておこう。次のことを知れば難解な H_∞制御も少しは身近になるだろう（ならないか？）。H_∞制御では(17)の S_0 を感度関数といい T_{ny} を相補感度関数という。後者に「相補」という接頭辞がつく理由は，(17)のように二つの感度関数の和がいつも 1 であり，一方が大きくなれば他方が小さくなる，すなわち，相補的に変化するからである。上の例で制御対象の変動を考えるには，その影響を外乱に含めればよい。外から入る外乱，および，制御対象の変動による影響（制御システムの内乱？）の二つをひっくるめて外乱と考えることができる。したがって，感度関数 S_0 を小さくできれば，外乱が抑圧される同時に，制御対象変動の影響も抑圧される（ロバストになる）。しかし，センサノイズが増幅されるという代償はある。

当然のことであるが，良いセンサを使ってノイズを小さくするのが最も効果がある。センサのところで信号とノイズが混ざってしまうと，「外乱抑圧のことは少しあきらめて下さい」という請求書が後で届く。情報処理の技術に長けた人ならば，信号処理で信号とノイズを分離できる筈だ。すなわち，制御対象のモデルに基づく最適フィルタ（カルマン・フィルタ）を使えばよい，と言うかもしれない。しかし，実際の制御対象とそのモデルがずれた場合に問題が残る。このモデルミスマッチは，制御系のロバスト性の低下という代償を払わされることになる。センサノイズには，いつも代償を払えという請求書がついている考えてよい。

ならば，センサをなくしてしまえばよいではないか，という主張にも一理ある。センサ無しの制御，すなわち，フィードフォワード制御への道である。我々の知識が完全ならばそれもよい。ただし，そのために使う制御対象の性質・特性・事前知識には，環境変化および経年変化などの影響が少ない確固不変なものを慎重に選ぶ必要がある。