「複素数の復習」

目的：２相回転機の回転座標変換を，２次元ベクトルでやると cos，sin，および，加法定理がいやになるほど出てくる。それに比べて，複素数表記でやれば cos と sin を追放できる。この文章の目的は，「複素数の世界」と「２次元ベクトルの世界」を行き来するときに必要となる知識を整理しておくことである。特に大切なのは，「4.2 作戦を実行した結果（行列と複素数の対応）」。

もくじ

参考文献

(1) 杉浦光夫：「基礎数学２　解析入門Ｉ」，東京大学出版会，(1980)
(この先生は，私と同郷です。ハイ！)
(2) 森正武，杉原正顕：「岩波講座応用数学　複素関数論Ｉ」，岩波書店，(1993)
(3) 野口李彦校閲，近藤正示執筆：「回転機の基礎理論」，電気工学ハンドブック原稿のつもり
(4) 難波江ほか：「基礎電気機器学」，電気学会大学講座，

1　複素数の定義

以下，☆☆☆☆までは退屈だから，忙しい人は☆☆☆☆へ直行！

1.1 複素数の定義（よく見かけるやり方）

実数 x_r, x_i と虚数単位 $j^2 = -1$ を用いて，

$$x = x_r + jx_i$$

と書かれる数 x を「複素数」と呼び，複素数が等しいことと四則演算を次のように定義する。

$$x_r + jx_i = y_r + jy_i \Leftrightarrow x_r = y_r \text{ かつ } x_i = y_i$$
$$(x_r + jx_i) \pm (y_r + jy_i) \equiv (x_r \pm y_r) + j(x_i \pm y_i)$$
$$(x_r + jx_i) \times (y_r + jy_i) \equiv (x_r y_r - x_i y_i) + j(x_r y_i + x_i y_r)$$
$$(x_r + jx_i) \div (y_r + jy_i) \equiv (x_r y_r + x_i y_i)/Y + j(x_i y_r - x_r y_i)/Y \quad \text{ただし} Y \equiv y_r^2 + y_i^2 \neq 0$$

単なる実数は $x_r + j0 = x_r$ のように書くことが多い。でもね！上の j は本当に存在するの？な〜んておどかしたりして！

1.2 2つの実数の組を使った複素数の定義（参考文献(1)）

上の嚇しなんて怖くない。次のようにすればいい。

まず，２つの実数の組を(x_r, x_i)と書くことにする。ここで，上の普通の定義をそっくりまねっこして，次のように定義する。

$$(x_r, x_i) = (y_r, y_i) \Leftrightarrow x_r = y_r \text{ かつ } x_i = y_i$$
$$(x_r, x_i) \pm (y_r, y_i) \equiv (x_r \pm y_r, x_i \pm y_i)$$
$$(x_r, x_i) \times (y_r, y_i) \equiv (x_r y_r - x_i y_i, x_r y_i + x_i y_r)$$
$$(x_r, x_i) \div (y_r, y_i) \equiv \left(\frac{x_r y_r + x_i y_i}{Y}, \frac{x_i y_r - x_r y_i}{Y}\right) \quad \text{ただし} Y \equiv y_r^2 + y_i^2 \neq 0$$

そうすれば，(x_r, x_i)が「普通の複素数」に対応することが，分かるよね！

もちろん，単なる実数は $x_r = (x_r, 0)$である。すると，実数の組(0, 1)は確かに存在するし，それが虚数単位 j に相当する（なぜなら，上の積の定義から(0, 1)×(0, 1) = (-1, 0)だから）。したがって，虚数単位 j も確かに存在することになる。よって，ちょっと気味の悪い $j^2 = -1$ を避けることができた。けれども**退屈だね**！

☆☆☆☆

そこで，頭のいい人（そうあなたのことです）は，次のようにピンときたでしょう！

『２つの実数の組は，２次元数ベクトルだ。したがって，複素数と２次元数ベクトルを同一視できそうだ，』

しかし，複素数と２次元ベクトルは完全に一対一に対応しないんだな！！たとえば，複素数の積は，２次元数ベクトルの積に対応する？？？？　本当？？？つまり，**下のようにできますか？**

$$\begin{pmatrix} x_r \\ x_i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_r \\ y_i \end{pmatrix} \quad ？？？？？？？？$$

左の２次元ベクトルを転置してもダーメ。結果がスカラーになっちゃうから。右を・・・？？

1.3 種明かし（参考文献(1)）

２次元数ベクトルは, 2×1 の行列のことだ。行列の積では左と右を入換えてはイカン。だから，左の掛けるもの（加害者，作用するもの）と右の掛けられるもの（被害者，作用されるもの）を区別すればよい。加害者と被害者がそろったから，種明かし。ジャンジャ〜ン！（参考文献(1)）

$$\text{複素数の積}\quad x \times y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_r & -x_i \\ x_i & x_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_r \\ y_i \end{pmatrix} \quad \text{２次数ベクトルに対応バージョン}$$

複素数なら積の左も右も同じ複素数だ。だけど，２次元数ベクトルでは積の左と右が, それぞれ, 行列（加害者）とベクトル（被害者）というように顔が変わる。面倒だけど，仕方がないから諦めてね！（ところで，n 次元数ベクトル空間に加法と乗法を定義して，しかも，積を可換にできるのは，n = 1, 2 の二つだけである。その二つとは，実数体と複素数体のこと。積が可換でなくてもよければ，n=4 のときは非可換体となりハミルトンの４元数体という・・・。なんて，えらそうに文献(1) p.42 の受け売り。）

上の 2×2 行列をよく見て！たった２つの要素で決まっている（対角要素が x_r で，非対角要素

が x_i）。よって，上の2×2行列を2次元数ベクトルもどきとしよう（ちょー強引だけど）。
ここで，加害者「2×2行列」君の性格を調べておこう。ただし， $x_r = x_i \neq 0$ のときだけ。

$$\begin{pmatrix} x_r & -x_i \\ x_i & x_r \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{ただし，} X \equiv \sqrt{x_r^2 + x_i^2}, \quad \theta \equiv \tan^{-1}\left(\frac{x_i}{x_r}\right)$$

上式から，加害者「2×2行列」君は，ベクトルに襲い掛かかりそれ（被害者ベクトル）を複素平面の原点を中心にして X 倍に引き伸ばして，正の角度θだけくるっと回してしまうだけで，それほど悪い奴ではないことが分かる。なお， $x_r = x_i = 0$ のときは，被害者を抹殺する（作用すると結果が0になる）殺人鬼になるから除いておいたわけだ。
などといっていると，話をどこに持っていこうとしているか，ばれちゃいましたね。

2　オイラーの公式

2.1 真打の御登場

虚数 $j\theta$ を右肩にもつ指数関数，つまり，

$$e^{j\theta} \equiv \exp(j\theta) = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$$

を**オイラーの公式**という。
前項最後の式にあった正の角度θだけくるっと回してまうのは，この $\exp(j\theta)$でして，

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \Leftrightarrow \exp(j\theta)$$

というふうに，「２次元ベクトルの世界」と「複素数の世界」が対応する。

2.2 指数関数は掛け算が足し算になるから便利なのよ

二つの指数関数の積が，

$$e^x e^y = e^{x+y}$$

となることは，いいよね！　そこで，上式の指数部が虚数のときを考えてみよう。つまり，

$$\begin{aligned} e^{j\alpha}e^{\pm j\beta} &= e^{j(\alpha \pm \beta)} = \cos(\alpha \pm \beta) + j\sin(\alpha \pm \beta) \\ &= (\cos\alpha + j\sin a)(\cos\beta \pm j\sin\beta) \\ &= (\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta) + j(\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta) \end{aligned}$$

表記でやると加法定理を一切使わなくてもよい仕掛けが，隠されている。

何が言いたいか？**オイラーの公式**は，強力で役に立つ奴だから，仲良くしてね。

3　虚々実々の戦い

ところで，上で「実部と虚部に分けて・・・」といったけど，どうすればいいんだろう？知的で教養があって融通の利く**あなた**のことではありません。「石頭コンピュータ」にやらせるにはどうすればいいのでしょうか？

3.1 複素数の実部と虚部を取り出す

それには，次のようにすればいいことは，先刻ご承知ですね。

$$x_r = \mathrm{Re}(x_r + jx_i) \qquad x_i = \mathrm{Im}(x_r + jx_i)$$

でもね！（また始まった！）実部と虚部をそれぞれ取り出すために，２つの関数 Re(), Im() が必要

です。こんな簡単な仕事に関数を２つも使うなんて，ちょっともったいない。『おねがい！たった一つの操作を定義するだけで実部と虚部を取り出せるようにしてちょ〜だい』，なんて言われたらどーする？
『判ったかったかな？　明智君！』（怪人二十面相　談）

3.2 救世主あらわる

共役だよ！つまり，

$$x_r = \frac{x + x^*}{2} = \frac{(x_r + jx_i) + (x_r - jx_i)}{2} = \frac{2x_r}{2}$$
$$x_i = (-j)\frac{x - x^*}{2} = (-j)\frac{(x_r + jx_i) - (x_r - jx_i)}{2} = (-j)\frac{2jx_i}{2}$$

実部と虚部を取り出す二つの仕事に**共**に**役**に立つから，「共役」なんちゃって。（これ，シャレだからね！「共役」の本当の意味は違うからね。）

上式２行目は，分母を $2j$ にしておけば，カッコいい・・・。（私は頭悪いから，割り算はやりたくない。そして，こうしておいたほうが・・・行列との対応を考えるときに逆行列を使わなくても・・・？？？）

共役のほうが，Re(), Im() よりも便利なことを追加しておこう。Re(), Im()は，複素数があらかじめ実部と虚部に分かれている（直角座標表現になっている）ときはいいけど，複素数が極座標表現のときには不便だ（絶対値に cos を掛ける！）。それに比べると，共役は，直角座標表現でも極座標表現でもどちらも虚部の符号を反転するだけでいい。
そもそも複素数表現を導入した背景には，回転座標変換の cos と sin を永久追放したかったことがある。Re()を使うと cos が顔を出しかねないから, 複素数表記の計算の途中は Re()を使わずに共役で逃げておいたほうが得だと思う。

おまけ：共役を使った公式をまとめておこう。（この文章では使わない。）

$$(x \pm y)^* = x^* \pm y^* \quad (xy)^* = x^* y^* \quad \left(\frac{x}{y}\right)^* = \frac{x^*}{y^*}$$
$$xx^* = |x|^2$$ ＜＝＝こいつは本当に役に立つ

おまけのおまけ：
- 複素平面で考えると，共役複素数は，元の複素数を実軸に対して折り返したものだ。
- 正方向にくるくる回る複素数の共役を作ると，負方向にくるくる回り出す。
- ２相回転機の１相だけに交流をくわえると交番磁界ができる。２回転磁界理論によれば，交番磁界は正方向と負方向にくるくる回る二つの成分に分けて考えることができる。このようなときには，共役を導入すると便利だ。
- ２相回転機に突極性があると，d 軸インダクタンスと q 軸インダクタンスがそれぞれに単相交流的に変化するから，このときも共役複素数が出てくる。

4　任意の２×２行列を複素数で表現する

振り返ってみると，複素数の話から始めて，２次元ベクトルの世界に入りこんでしまった。ここでは，逆に，「２次元ベクトルの世界」を「複素数の世界」に翻訳する方法を考える。

4.1　苦肉の力任せ作戦

前に出てきた，加害者の「2×2 行列」君は

$$\begin{pmatrix} x_r & -x_i \\ x_i & x_r \end{pmatrix}$$

と, たった二つの実数 x_r と x_i だけで表せる。だけど, 世の中はそんなに甘くない。すくなくとも, ２軸理論では突極形回転機のインダクタンス行列は非対称で，おまけに対角要素まで異なる。
一般の 2×2 行列は,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

というふうに，四つの要素が全部異なっていたりする。この凶悪な行列（加害者，つまり，乗算の左側にあるやつ）を複素数で表すためには，どうしたらいいんだろう？

以下の方法は，上の凶悪な行列を複素数で表す方法として，エレガントではない。しかし，なんとかできる。（もっとエレガントな方法があれば，私は知りたい。）まず，次の４行列

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

をかんがえる。この４つから，次のように 2×2 行列で一つの要素だけが 1 になるもの

$$\frac{A_1 + A_3}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \frac{A_1 - A_3}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \frac{A_2 + A_4}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \frac{-A_2 + A_4}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

を作れる。そこで，上の各式にそれぞれ a, d, c, b を掛けていって全部足したら，前に出てきた凶悪な行列になる。

つまり，A_1, A_2, A_3, A_4 をそれぞれ複素数で表すことができれば，凶悪な行列と複素数の対応を作れる，といいたいのです。

4.2 作戦を実行した結果（行列と複素数の対応）

上の４つの行列は，それぞれ，次のように（加害者モードの）複素数で表現できる。

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \text{複素数なら 1 を掛ければよい。つまり，何もしなくてよい。} \tag{4.3}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \text{複素数なら } \exp(j\pi/2) = j \text{ を掛ければよい。} \tag{4.4}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \text{複素数なら共役作用素，右側に襲い掛かり共役を作る conj()です。} \tag{4.5}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \text{複素数なら } j \times \text{conj() です。} \tag{4.6}$$

これらの 4 つの対応が，ここまでの文章で一番いいたかったことです。これらを知らないと，突極形回転機の回路方程式を複素数表記だけで座標変換しようとしてもうまくゆかないのです。

5 二相回転機の回転座標変換（複素数表記の例）

5.1 固定子に電機子巻線がある二相回転機のインダクタンス行列

固定子に電機子巻線がある二相回転機のインダクタンス行列は，あまり教科書に書いてないけれど，次のようにすれば求められる。

まず，回転子に電機子巻線がある場合は，難波江ほか：「基礎電気機器学」の p.80 (4.22)式にインダクタンス行列が求められている。こいつを，次のようにして，固定子に電機子巻線がある場合に変更する。

① 固定子添字 s と回転子添字 r を入換える。

② $\theta = -\theta'$ とする。（同書 p.79 図 4.13 では界磁 d 軸から電機子α軸への角度をθにしている。しかし，固定子に電機子がある場合は，止まっている電機子α軸から回っている界磁 d 軸へ角度を決めたほうが分かりやすい。この新しい角度をθ'とすると，θとは符号が反転する。）

③ インダクタンス行列(L')の行と列を，磁束鎖交数が次式となるように入換える。

$$\begin{pmatrix}\psi_{s\alpha} & \psi_{s\beta} & \psi_{rd} & \psi_{rq}\end{pmatrix}^T = (L')\begin{pmatrix}i_{s\alpha} & i_{s\beta} & i_{rd} & i_{rq}\end{pmatrix} \tag{5.15}$$

注意：よくある間違いは，①と②の代わりに，添字 d, q と添字α, βをそれぞれ入換えてしまうことである。こんなことをすると，元は突極性が dq 軸にあったのに，変更後は突極性が$\alpha\beta$軸にあることになってしまう，から間違いである。一方，うえ①②のようにすれば，変更後も突極性が dq 軸にあるから正しい。

以上により，固定子に電機子巻線がある二相回転機のインダクタンス行列(L')は，

$$(L') = \begin{pmatrix}(L'_{11}) & (L'_{12}) \\ (L'_{12})^T & (L'_{22})\end{pmatrix} \tag{5.16a}$$

$$(L'_{11}) = \begin{pmatrix}L_{s0} + L_{s1}\cos 2\theta' & L_{s1}\sin 2\theta' \\ L_{s1}\sin 2\theta' & L_{s0} - L_{s1}\cos 2\theta'\end{pmatrix} \tag{5.16b}$$

$$(L'_{12}) = \begin{pmatrix}M_d\cos\theta' & -M_q\sin\theta' \\ M_d\sin\theta' & M_q\cos\theta'\end{pmatrix} \tag{5.16c}$$

$$(L'_{22}) = \begin{pmatrix}\ell_r + L_{rd} & 0 \\ 0 & \ell_r + L_{rq}\end{pmatrix} \tag{5.16d}$$

$$L_{s0} \equiv \ell_s + \frac{L_{sd} + L_{sq}}{2} \quad , \quad L_{s1} \equiv \frac{L_{sd} - L_{sq}}{2} \tag{5.16e}$$

となる。

巻線抵抗を考慮すると，固定電機子形の二相回転機の回路方程式は次式となる。

$$\begin{pmatrix}v_{s\alpha} \\ v_{s\beta} \\ v_{rd} \\ v_{rq}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}R_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \\ i_{rd} \\ i_{rq}\end{pmatrix} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((L')\begin{pmatrix}i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \\ i_{rd} \\ i_{rq}\end{pmatrix}\right) \tag{5.17}$$

5.2 インダクタンス行列の複素数表現

上で求めた固定子に電機子巻線がある二相回転機のインダクタンス行列(L')の複素数表現を求めよう。

(5.16b)に(4.3〜6)を適用して複素数表現を求めると，

$$\begin{aligned}(L'_{11}) &= L_{s0}A_1 + L_{s1}(\cos 2\theta' A_3 + \sin 2\theta' A_4) \\ &\Leftrightarrow L_{s0} + L_{s1}(\cos 2\theta' \mathrm{conj}() + \sin 2\theta' j\mathrm{conj}()) \\ &= L_{s0} + L_{s1}\exp(j2\theta')\mathrm{conj}()\end{aligned}$$

(5.16c)に(4.2)，(4.3〜6)を適用して複素数表現を求めると，

$$\begin{aligned}(L'_{12}) &= M_d\cos\theta'\frac{A_1 + A_3}{2} + M_q\cos\theta'\frac{A_1 - A_3}{2} + M_d\sin\theta'\frac{A_2 + A_4}{2} + M_q\sin\theta'\frac{A_2 - A_4}{2} \\ &= \frac{M_d + M_q}{2}(\cos\theta' A_1 + \sin\theta' A_2) + \frac{M_d - M_q}{2}(\cos\theta' A_3 + \sin\theta' A_4) \\ &\Leftrightarrow \frac{M_d + M_q}{2}(\cos\theta' + \sin\theta' \cdot j) + \frac{M_d - M_q}{2}(\cos\theta' + \sin\theta' \cdot j)\mathrm{conj}() \\ &= \frac{M_d + M_q}{2}\exp(j\theta') + \frac{M_d - M_q}{2}\exp(j\theta')\mathrm{conj}() \\ &= M_0\exp(j\theta') + M_1\exp(j\theta')\mathrm{conj}()\end{aligned}$$

$$(L'_{12})^T = M_d \cos\theta' \frac{A_1 + A_3}{2} + M_q \cos\theta' \frac{A_1 - A_3}{2} + M_q \sin\theta' \frac{-A_2 - A_4}{2} + M_d \sin\theta' \frac{-A_2 + A_4}{2}$$
$$= \frac{M_d + M_q}{2}(\cos\theta' A_1 - \sin\theta' A_2) + \frac{M_d - M_q}{2}(\cos\theta' A_3 + \sin\theta' A_4)$$
$$\Leftrightarrow \frac{M_d + M_q}{2}(\cos\theta' - \sin\theta' \cdot j) + \frac{M_d - M_q}{2}(\cos\theta' + \sin\theta' \cdot j)\mathrm{conj}()$$
$$= \frac{M_d + M_q}{2}\exp(-j\theta') + \frac{M_d - M_q}{2}\exp(j\theta')\mathrm{conj}()$$
$$= M_0 \exp(-j\theta') + M_1 \exp(j\theta')\mathrm{conj}()$$

ただし,

$$M_0 \equiv \frac{M_d + M_q}{2} \qquad M1 \equiv \frac{M_d - M_q}{2}$$

(5.16d)に(4.3～6)を適用して複素数表現を求めると,

$$(L'_{22}) = (\ell_r + L_{rd})\frac{A_1 + A_3}{2} + (\ell_r - L_{rq})\frac{A_1 - A_3}{2}$$
$$= (\ell_r + \frac{L_{rd} + L_{rq}}{2})A_1 + \frac{L_{rd} - L_{rq}}{2}A_3 \qquad \text{(ver.04 改訂)}$$
$$\Leftrightarrow L_{r0} + L_{r1}\mathrm{conj}()$$

以上をまとめると，固定電機子形二相回転機のインダクタンス行列の複素数表現は,

$$(L') = \begin{pmatrix} L_{s0} + L_{s1}\exp(j2\theta')\mathrm{conj}() & M_0 \exp(j\theta') + M_1 \exp(j\theta')\mathrm{conj}() \\ M_0 \exp(-j\theta') + M_1 \exp(j\theta')\mathrm{conj}() & L_{r0} + L_{r1}\mathrm{conj}() \end{pmatrix}$$

（ver.04 改訂）

のように求められた。ただし，conj()は複素共役を作る演算子で，右側に何かくるとそいつに襲い掛かる（微分演算子と同じ）。

ver.04 改訂(2001.07.12)： 下添字 s => r 変更。thanks to Kobayashi!

5.3 回路方程式

5.4 トルク式

複素数表記で，有効電力を計算し，回転機のトルク式を導出する方法。やってみると，有効電力を計算するため実部を取り出そうとしていても，途中で，虚部を取り出すことになっていたりして面白い。（つまり，トルクは外積の形で，それは複素数の虚部の形でもある）

6 今もって判らないこと

複素数表記で，電力を

$$(i)^{T*}(v) = P + jQ \qquad (Q\text{は，遅れ力率が正。})$$

と計算したとき，Q が意味するもの？？？（昔，誘導機でやったら，加速度みたいなものが出て来たりして，諦めてしまった。）

なお，トルクは P から出てくるのであり，Q からではありません。これ，今回始めて気がつきました。ハイ。

＜＜＜おしまい＞＞＞