

AC モータのモデリングと制御

正 員 近藤 正示*

Modeling and Control of AC Motors

Seiji Kondo*, Member

1. はじめに

モータをながめる座標を変換すると、その挙動を理解しやすくなったり、制御系を考案しやすくなることもある。二軸理論や回転座標変換は、まさに、このためにある。回転機の二軸理論をマスターするつもりなら、名著「基礎電気機器学」⁽¹⁾を薦める。

本文は、誘導機とPMモータのモデリング、および、その制御に関する要点をまとめたものである。次の事項が、目新しいと思われる。

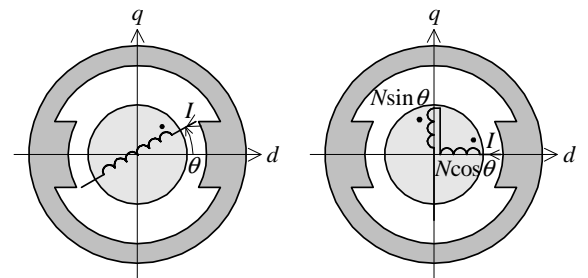
- 複素平面では正回転を左回り（反時計回り）とする習慣に合わせて、座標系の図でも左回り（反時計回り）を正回転とした。
- 線間電圧から直交二相電圧を計算する式を、3・3項で導出した。
- 突極機でも使える複素数表記による回転座標変換を5・4項に示した。
- いわゆるすべり周波数形ベクトル制御の安定性に関する簡単な証明を6・4項に示した。

なお、本文では、座標変換を適用するためにモータの起磁力は正弦波状に分布しているものと仮定する。実際、多くのモータでは正弦波分布巻線が施されており、この仮定は満たされる。この仮定により、モータの電圧・電流・磁束鎖交数などの空間的な加法を定義できて、それらをベクトルとして表現し、座標変換することが可能となる。ただし、起磁力分布が正弦波状でも、磁気抵抗が正弦波状でなければ磁束は正弦波状に分布しない。ここでは、磁気抵抗のことは不問にする。

2. 回転機のインダクタンス

2・1 突極性を考慮したインダクタンスの計算式

2・1・1 自己インダクタンスの計算式 図1(a)に示した突極機において、巻数 N のコイルの自己インダクタンスを計算してみよう。突極性のために d 軸方向と q 軸方向



(a) 巻数 N のコイル (b) コイル巻数の分解

図1 自己インダクタンスの計算モデル

ではパーミアンスが異なることを考慮する必要がある。そこで、図1(a)の巻数 N のコイルは、図1(b)のように d 軸および q 軸に沿って分解した二つのコイルを直列接続したものと考えてよいことに着目する。図1(b)の二つのコイルの等価な巻数は

$$N'_d = N \cos \theta, \quad N'_q = N \sin \theta \dots \dots \dots (1)$$

となる。ここで、 d 軸方向と q 軸方向のそれぞれの鉄心を通る磁路のパーミアンスを $\mathcal{P}_d, \mathcal{P}_q$ とする。パーミアンスと巻数の二乗の積が有効な自己インダクタンスである。よって、二つのコイルの自己インダクタンスは、それぞれ、

$$L'_{ed} = \mathcal{P}_d (N'_d)^2, \quad L'_{eq} = \mathcal{P}_q (N'_q)^2 \dots \dots \dots (2)$$

となる。 d 軸と q 軸は直交しているから二つのコイルの間に相互誘導はなく、これらを直列接続したものの合成インダクタンスは単純に和をとればよい。したがって、図1(a)の巻数 N のコイルの自己インダクタンスは

$$L(\theta) = L'_{ed} + L'_{eq} = L_{ed} \cos^2 \theta + L_{eq} \sin^2 \theta \dots \dots \dots (3a)$$

$$L_{ed} = \mathcal{P}_d N^2, \quad L_{eq} = \mathcal{P}_q N^2 \dots \dots \dots (3b)$$

となる。
ところで、自己インダクタンスの計算には鉄心以外の空隙を通る漏れ磁束も考慮しなければならない。そこで、鉄心以外の磁路のパーミアンス \mathcal{P}_l による自己インダクタンスの増加分を加算すると、(3a)と(3b)式は

* 長岡技術科学大学 電気系
〒 940-2188 新潟県長岡市上富岡町 1603-1
Dept. of E&E, Nagaoka University of Technology
1603-1, Kamitomioka-cho, Nagaoka, Niigata 940-2188

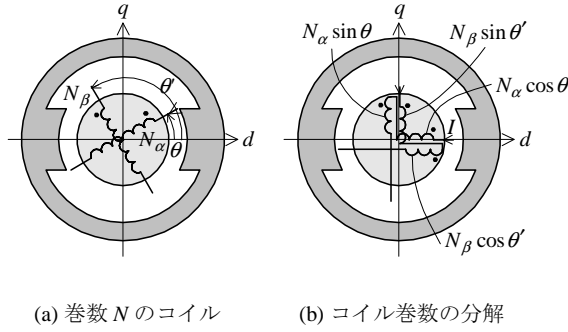


図2 相互インダクタンスの計算モデル

$$L(\theta) = L_d \cos^2 \theta + L_q \sin^2 \theta \dots \dots \dots (4a)$$

$$L_d = (\mathcal{P}_l + \mathcal{P}_d)N^2, \quad L_q = (\mathcal{P}_l + \mathcal{P}_q)N^2 \dots \dots \dots (4b)$$

ように修正される。自己インダクタンス $L(\theta)$ はコイルの回転角 θ によって変化する。

しかし、突極性がない円筒形の回転機では $\mathcal{P}_d = \mathcal{P}_q$ であるから、それを上式に代入して

$$L(\theta) = L_d (= L_q) \dots \dots \dots (5)$$

のように、回転角 θ に関わらず一定となる。

2・1・2 相互インダクタンスの計算式 図2(a)のように配置された二つのコイル間の相互インダクタンスを計算してみよう。上記と同じように、まず、巻数 N_α のコイルを d 軸と q 軸に分解すると

$$N'_{d\alpha} = N_\alpha \cos \theta, \quad N'_{q\alpha} = N_\alpha \sin \theta \dots \dots \dots (6)$$

となる。同じく、巻数 N_β のコイルを分解すると

$$N'_{d\beta} = N_\beta \cos \theta', \quad N'_{q\beta} = N_\beta \sin \theta' \dots \dots \dots (7)$$

となる。 d 軸上にある $N'_{d\alpha}$ と $N'_{d\beta}$ のコイル同士の相互インダクタンスは

$$M_d = \mathcal{P}_d N_\alpha N_\beta \cos \theta \cos \theta' \dots \dots \dots (8)$$

となる。 q 軸上にある $N'_{q\alpha}$ と $N'_{q\beta}$ のコイル同士の相互インダクタンスは

$$M_q = \mathcal{P}_q N_\alpha N_\beta \sin \theta \sin \theta' \dots \dots \dots (9)$$

で表される。また、 d 軸上のコイルと q 軸上のコイルは互いに直交しているから相互インダクタンスはない。したがって、以上を合わせた全体の相互インダクタンスは

$$\begin{aligned} M(\theta) &= M_d + M_q \\ &= \mathcal{P}_d N_\alpha N_\beta \cos \theta \cos \theta' + \\ &\quad \mathcal{P}_q N_\alpha N_\beta \sin \theta \sin \theta' \dots \dots \dots (10) \end{aligned}$$

のように求められた。

とくに、 $N_\alpha = N_\beta = N$ かつ $\theta' = \theta + \pi/2$ の場合は

$$\begin{aligned} M(\theta) &= -\frac{1}{2}(\mathcal{P}_d - \mathcal{P}_q)N^2 \sin 2\theta \\ &= -\frac{1}{2}(L_d - L_q) \sin 2\theta \dots \dots \dots (11) \end{aligned}$$

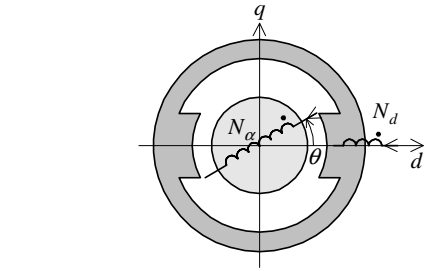


図3 異なる鉄心上の巻線の相互インダクタンス

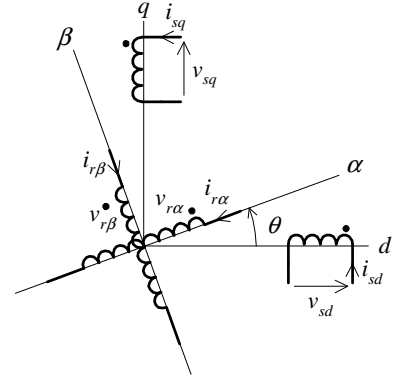


図4 二相回転機のインダクタンスの計算モデル

となる。ただし、(4b)式を使った[†]。

一方、円筒形の場合は $\mathcal{P}_d = \mathcal{P}_q$ であるから、

$$M(\theta) = 0 \dots \dots \dots (12)$$

である。

2・1・3 異なる鉄心上の巻線の相互インダクタンス 図3のように配置されたコイル間の相互インダクタンスは上の2・1・2項を応用して計算できる。図2(a)において $\theta' = 0$ とすれば同図の N_β が、図3の N_d に対応する。したがって、(10)式に $\theta' = 0$ と $N_\beta = N_d$ を代入して

$$M_{d\alpha}(\theta) = \mathcal{P}_d N_d N_\alpha \cos \theta \dots \dots \dots (13)$$

のように求められた。

2・2 二相回転機のインダクタンス行列 前項に示した計算式を利用して、図4の二相回転機のインダクタンス行列を求めると次のようになる。

$$[L] = \begin{matrix} & s_d & s_q \\ \begin{matrix} s_d \\ s_q \\ r_a \\ r_b \end{matrix} & \begin{bmatrix} (\mathcal{P}_l + \mathcal{P}_d)N_d^2 & 0 \\ 0 & (\mathcal{P}_l + \mathcal{P}_q)N_q^2 \\ \mathcal{P}_d N_d N_\alpha \cos \theta & \mathcal{P}_q N_q N_\alpha \sin \theta \\ -\mathcal{P}_d N_d N_\beta \sin \theta & \mathcal{P}_q N_q N_\beta \cos \theta \end{bmatrix} \end{matrix}$$

[†] 正確には(3b)式を使ったが、漏れインダクタンスは差 $L_d - L_q$ ではキャンセルされるから(4b)式でもよい。

$$\left[\begin{array}{c} \frac{r_\alpha}{\mathcal{P}_d N_d N_\alpha \cos \theta} \\ \mathcal{P}_q N_q N_\alpha \sin \theta \\ (\mathcal{P}'_l + \mathcal{P}_d \cos^2 \theta + \mathcal{P}_q \sin^2 \theta) N_\alpha^2 \\ -\frac{1}{2}(\mathcal{P}_d - \mathcal{P}_q) N_\alpha N_\beta \sin 2\theta \\ \hline \frac{r_\beta}{-\mathcal{P}_d N_d N_\beta \sin \theta} \\ \mathcal{P}_q N_q N_\beta \cos \theta \\ -\frac{1}{2}(\mathcal{P}_d - \mathcal{P}_q) N_\alpha N_\beta \sin 2\theta \\ (\mathcal{P}'_l + \mathcal{P}_d \sin^2 \theta + \mathcal{P}_q \cos^2 \theta) N_\beta^2 \end{array} \right] \dots\dots\dots (14)$$

なお、(14)式において、たとえば、 s_d 行 s_d 列要素は s_d コイルの自己インダクタンス、 s_d 行 r_α 列要素は r_α コイルから s_d コイルへの相互インダクタンスである。また、(14)式から分かるようにこの行列は対称である。

一般的な(14)式を使って、後で使用するため特別な場合について計算しておこう。

まず、固定子および回転子のコイルの巻数がそれぞれ等しい、すなわち、 $N_d = N_q = N_s$ および $N_\alpha = N_\beta = N_r$ のときは

$$\left. \begin{array}{l} L_{sd} = \mathcal{P}_d N_s^2, \quad L_{sq} = \mathcal{P}_q N_s^2 \\ L_{rd} = \mathcal{P}_d N_r^2, \quad L_{rq} = \mathcal{P}_q N_r^2 \\ M_d = \mathcal{P}_d N_s N_r, \quad M_q = \mathcal{P}_q N_s N_r \\ l_s = \mathcal{P}_l N_s^2, \quad l_r = \mathcal{P}'_l N_r^2 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

とおくことにより(14)式のインダクタンス行列は次のようになる。

$$\left[\begin{array}{c} \frac{s_d}{s_d} \left[\begin{array}{cc} l_s + L_{sd} & 0 \\ 0 & l_s + L_{sq} \end{array} \right] \\ \frac{r_\alpha}{r_\alpha} \left[\begin{array}{cc} M_d \cos \theta & M_q \sin \theta \\ -M_d \sin \theta & M_q \cos \theta \end{array} \right] \\ \frac{r_\beta}{r_\beta} \left[\begin{array}{cc} M_d \cos \theta & M_q \sin \theta \\ -M_d \sin \theta & M_q \cos \theta \end{array} \right] \\ \hline \frac{r_\alpha}{l_r + \frac{L_{rd} + L_{rq}}{2} + \frac{L_{rd} - L_{rq}}{2} \cos 2\theta} \\ \frac{r_\beta}{-\frac{L_{rd} - L_{rq}}{2} \sin 2\theta} \\ \hline \frac{r_\alpha}{-M_d \sin \theta} \\ \frac{r_\beta}{M_q \cos \theta} \\ -\frac{L_{rd} - L_{rq}}{2} \sin 2\theta \\ \hline l_r + \frac{L_{rd} + L_{rq}}{2} - \frac{L_{rd} - L_{rq}}{2} \cos 2\theta \end{array} \right] \dots\dots\dots (16)$$

(15)式に加えて、ギャップが一様で $\mathcal{P}_d = \mathcal{P}_q$ の場合は

$$M = M_d = M_q, \quad L_s = L_{sd} = L_{sq}, \quad L_r = L_{rd} = L_{rq} \quad (17)$$

とおける。これらを(16)式の代入すると、さらに簡単な次式が得られる。

$$\left[\begin{array}{c} \frac{s_d}{s_d} \left[\begin{array}{cc} l_s + L_s & 0 \\ 0 & l_s + L_s \end{array} \right] \\ \frac{r_\alpha}{r_\alpha} \left[\begin{array}{cc} M \cos \theta & M \sin \theta \\ -M \sin \theta & M \cos \theta \end{array} \right] \\ \frac{r_\beta}{r_\beta} \left[\begin{array}{cc} M \cos \theta & M \sin \theta \\ -M \sin \theta & M \cos \theta \end{array} \right] \\ \hline \frac{r_\alpha}{(l_s + L_s)[I_2]} \\ \frac{r_\beta}{M[C(\theta)]^T} \end{array} \right] \dots\dots\dots (18)$$

$$= \left[\begin{array}{cc} (l_s + L_s)[I_2] & M[C(\theta)] \\ M[C(\theta)]^T & (l_r + L_r)[I_2] \end{array} \right] \dots\dots\dots (19)$$

ただし

$$[C(\theta)] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad [I_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots (20)$$

である。

2・3 回転子に突極性がある場合 前項では、図4のように、突極性を持つ dq 軸が固定子にある回転機のインダクタンス行列を求めた。これを利用して突極性を持つ dq 軸が回転子にある(したがって、後で示す図6(b)のように $\alpha\beta$ 軸が固定子にある)回転機のインダクタンス行列を求めよう。その手順は次のようになる[†]。

- (1) インダクタンス行列の固定子添字 s と回転子添字 r を入れ換える。
- (2) α 軸から d 軸へ測った回転角を θ' とすれば、上記で使った回転角 θ とは逆回りだから $\theta = -\theta'$(21)である。これを、インダクタンス行列に代入して θ を消去する。
- (3) 行と列の順番を $s_\alpha, s_\beta, r_d, r_q$ の順に入れ換える。この手順を(16)式のインダクタンス行列に適用して、 dq 軸が回転子にある回転機のインダクタンス行列を求めると次のようになる。

$$\left[\begin{array}{c} \frac{s_\alpha}{s_\alpha} \left[\begin{array}{cc} l_s + \frac{L_{sd} + L_{sq}}{2} + \frac{L_{sd} - L_{sq}}{2} \cos 2\theta' & \\ & \frac{L_{sd} - L_{sq}}{2} \sin 2\theta' \end{array} \right] \\ \frac{r_d}{r_d} \left[\begin{array}{cc} M_d \cos \theta' & \\ & -M_q \sin \theta' \end{array} \right] \\ \frac{r_q}{r_q} \left[\begin{array}{cc} M_d \cos \theta' & \\ & -M_q \sin \theta' \end{array} \right] \end{array} \right]$$

[†] 注意：ここでは、近藤のオリジナルである。よくある間違いは、手順(1)と(2)の代わりに、添字 d, q と添字 α, β をそれぞれ入れ換えてしまうことである。こんなことをすると、元は突極性が dq 軸にあったのに、変更後は突極性が $\alpha\beta$ 軸にあることになってしまう。つまり、間違いである。一方、手順(1)と(2)のようにすれば、変更後も突極性が dq 軸にあるから正しい。

$$\frac{\frac{s_\beta}{L_{sd} - L_{sq}} \sin 2\theta'}{\ell_s + \frac{L_{sd} + L_{sq}}{2} - \frac{L_{sd} - L_{sq}}{2} \cos 2\theta'} \begin{matrix} M_d \sin \theta' \\ M_q \cos \theta' \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} r_d & r_q \\ M_d \cos \theta' & -M_q \sin \theta' \\ M_d \sin \theta' & M_q \cos \theta' \\ \ell_r + L_{rd} & 0 \\ 0 & \ell_r + L_{rq} \end{matrix} \dots\dots\dots (22)$$

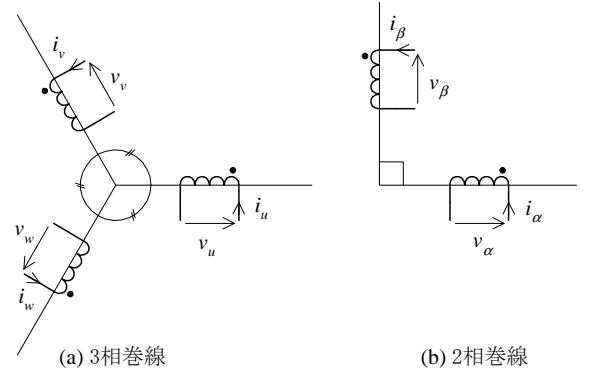


図5 三相二相変換

このインダクタンス行列は回転界磁形の同期電動機などの解析に使われる。

なお，元になったインダクタンス行列(14)式が対称行列であったから，ここで求めたインダクタンス行列(16), (18), (22)式はすべて対称行列であることに注意しておく。

2・4 三相回転機のインダクタンス行列 ***図4.14†*** に示した三相回転機のインダクタンス行列も，同様に求められる。ただし，簡単のためギャップ長が等しく $\mathcal{P}_d = \mathcal{P}_q$ である場合を示すと，次のようになる。

$$[L] = \begin{matrix} s_a & s_b & s_c \\ s_a \begin{bmatrix} l_s + L_s & L_s \cos(2\pi/3) & L_s \cos(2\pi/3) \\ L_s \cos(2\pi/3) & l_s + L_s & L_s \cos(2\pi/3) \\ L_s \cos(2\pi/3) & L_s \cos(2\pi/3) & l_s + L_s \end{bmatrix} \\ r_a \begin{bmatrix} M \cos \theta & M \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & M \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ M \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & M \cos \theta & M \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ M \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & M \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & M \cos \theta \end{bmatrix} \\ r_b \begin{bmatrix} l_r + L_r & L_r \cos(2\pi/3) & L_r \cos(2\pi/3) \\ L_r \cos(2\pi/3) & l_r + L_r & L_r \cos(2\pi/3) \\ L_r \cos(2\pi/3) & L_r \cos(2\pi/3) & l_r + L_r \end{bmatrix} \\ r_c \end{matrix} \dots\dots\dots (23)$$

$$= \begin{bmatrix} l_s[I_3] + L_s[C'(0)] & M[C'(\theta)] \\ M[C'(\theta)]^T & l_r[I_3] + L_r[C'(0)] \end{bmatrix} \dots\dots\dots (24)$$

ただし

$$[C'(\theta)] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos \theta & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos \theta \end{bmatrix} \dots\dots\dots (25)$$

である。

† 難波江ほか⁽¹⁾ p.81 参照

3. 三相 - 二相変換

3・1 三相 - 二相変換とその必要性 図5に三相巻線(u, v, w)と直交2巻線(α, β)を示す。同図のように，u相方向とα相方向を一致させ，さらに，二相巻線に0相成分を追加すると，次式のように三相量(u, v, w)は，二相量(α, β)と0相成分に等価変換できる。

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 1/\sqrt{2} & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \dots\dots\dots (26a)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \dots\dots\dots (26b)$$

なお，三相3線式では0相電流が流れないからこれを省略することができる。

ここで注意しておくが，三相3線式の回路方程式を三つ立てても解けないことがある。なぜならば，三相星形結線で中性点非接地のときは三つの線電流の和は0であるから，独立な線電流は二つしかない。したがって，三つの線電流を使った回路方程式を単純に三つ立ててもそのうちの二つが他の二つに従属してしまえば，連立方程式の係数の行列式が0となり，解けなくなる^{††}。あらかじめ三相を二相に変換しておけば，この問題は起きない。

3・2 三相巻線と二相巻線の定数の対応 実際の交流モータは三相巻線であるから，測定して得られる定数は三相巻線のものである。それを，等価な二相巻線の定数に変換する計算式を以下に示す^{†††}。なお，三相巻線の定数は，星形結線に換算したものと仮定する。

三相巻線の巻線抵抗をステータ R_s ，ロータ R_r として，インダクタンス行列(24)式とファラデーの法則から，三相交流モータの電圧・電流方程式は次式となる。

†† 特別な工夫をすれば，三つの線電流を使った回路方程式でも解けるようにすることはできる。

††† 難波江ほか⁽¹⁾ の第4.2.3項，および，研究ノート D-8 p.73, D-16 p.18-20 参照

$$\begin{bmatrix} v_{su} \\ v_{sv} \\ v_{sw} \\ v_{ru} \\ v_{rv} \\ v_{rw} \end{bmatrix} = [\mathbf{Z}_3] \begin{bmatrix} i_{su} \\ i_{sv} \\ i_{sw} \\ i_{ru} \\ i_{rv} \\ i_{rw} \end{bmatrix} \quad (27a)$$

$$[\mathbf{Z}_3] = \begin{bmatrix} R_s[\mathbf{I}_3] & 0 \\ 0 & R_r[\mathbf{I}_3] \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \ell_s[\mathbf{I}_3] + L_s[\mathbf{C}'(0)] & M[\mathbf{C}'(\theta)] \\ M[\mathbf{C}'(\theta)]^T & \ell_r[\mathbf{I}_3] + L_r[\mathbf{C}'(0)] \end{bmatrix} \quad (27b)$$

ただし、 $[\mathbf{C}'(\theta)]$ は、(25) 式で与えられる。

上の三相モータの回路方程式を、等価な二相モータの回路方程式に変換する。このため、(26a) 式を参照して、

$$\begin{bmatrix} v_{*u} \\ v_{*v} \\ v_{*w} \end{bmatrix} = [\mathbf{C}_{32}] \begin{bmatrix} v_{*0} \\ v_{*\alpha} \\ v_{*\beta} \end{bmatrix} \quad (28a)$$

$$\begin{bmatrix} i_{*u} \\ i_{*v} \\ i_{*w} \end{bmatrix} = [\mathbf{C}_{32}] \begin{bmatrix} i_{*0} \\ i_{*\alpha} \\ i_{*\beta} \end{bmatrix} \quad (28b)$$

ただし、上式の下添字 * は、ステータでは s 、ロータでは r である。また、変換行列 $[\mathbf{C}_{32}]$ は、(26a) 式から、

$$[\mathbf{C}_{32}] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 1/\sqrt{2} & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (29)$$

である。(28a)、(28b) 式を (27a) 式に代入すれば、

$$\begin{bmatrix} v_{s0} \\ v_{sd} \\ v_{sq} \\ v_{r0} \\ v_{r\alpha} \\ v_{r\beta} \end{bmatrix} = [\mathbf{Z}_2] \begin{bmatrix} i_{s0} \\ i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_{r0} \\ i_{r\alpha} \\ i_{r\beta} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (30)$$

となる[†]。ただし、 $[\mathbf{Z}_2]$ は 6 行 6 列の行列であり、

$$[\mathbf{Z}_2] = \begin{bmatrix} [\mathbf{C}_{32}] & 0 \\ 0 & [\mathbf{C}_{32}] \end{bmatrix}^{-1} [\mathbf{Z}_3] \begin{bmatrix} [\mathbf{C}_{32}] & 0 \\ 0 & [\mathbf{C}_{32}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s[\mathbf{I}_3] & 0 \\ 0 & R_r[\mathbf{I}_3] \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \ell_s[\mathbf{I}_3] & 0 \\ 0 & \ell_r[\mathbf{I}_3] \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \frac{3}{2} \begin{bmatrix} L_s \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & [\mathbf{I}_2] \end{bmatrix} & M \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & [\mathbf{C}(\theta)] \end{bmatrix} \\ M \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & [\mathbf{C}^T(\theta)] \end{bmatrix} & L_r \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & [\mathbf{I}_2] \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (31)$$

[†] ただし、2 行目と 3 行目の添字は、 $s\alpha$ と $s\beta$ ではなく sd と sq である。これは、後で (18) 式と比較できるようにするためである。このようにしても、三相ステータの a 相軸を二相ステータの d 軸に合わせれば、矛盾はない。

となる^{††}。なお、 $[\mathbf{C}(\theta)]$ は (20) 式で与えられた 2 行 2 列の行列である。

ここで、(31) 式を (18) 式の対応する部分と比較すれば、三相巻線定数と二相巻線定数の対応が得られる。以下では、二相巻線および三相巻線の定数を、それぞれ上添字で区別して、 $L^{<2>}$ 、 $L^{<3>}$ などと書くことにする。各定数の対応式は次のようになる。すなわち、二相巻線定数が三相巻線定数の 3/2 倍になるもの、

$$L_s^{<2>} = \frac{3}{2} L_s^{<3>} \quad (32a)$$

$$L_r^{<2>} = \frac{3}{2} L_r^{<3>} \quad (32b)$$

$$M^{<2>} = \frac{3}{2} M^{<3>} \quad (32c)$$

および、次のように二相巻線定数と三相巻線定数が同じになるもの、

$$\ell_s^{<2>} = \ell_s^{<3>}, \quad \ell_r^{<2>} = \ell_r^{<3>} \quad (32d)$$

$$R_s^{<2>} = R_s^{<3>}, \quad R_r^{<2>} = R_r^{<3>} \quad (32e)$$

のように分かれる^{†††}。

3.3 三相 - 二相変換の実装 中性点が非接地の三相モータでは、三相の電流の和が 0 であるから、三相のうちの一相の電流を検出すれば十分である。つまり、(26b) 式を利用して、

$$\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ -(i_u + i_v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_u \\ i_v \end{bmatrix} \quad (33)$$

のように計算する。なお、 i_v を消去して次のようにしてもよい。

$$\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_u \\ i_w \end{bmatrix} \dots\dots\dots (34)$$

三相線間電圧から二相電圧への変換は、(26a) 式を利用して次のようにする^{††††}。

^{††} (31) の右辺最後の項の 1 行目と 4 行目はすべて 0 である。したがって、零相電圧が印加されても有効インダクタンスは零相電流を制限してくれないことが分かる。

^{†††} ああ面倒くさい！ 全部 3/2 倍になればいいのに、そうではない。

^{††††} 研究ノート D-8 p.74

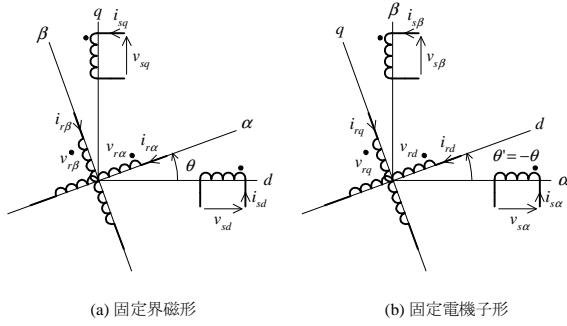


図6 一般二相モータ

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} v_{uv} \\ v_{vw} \\ v_{wu} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} v_u \\ v_v \\ v_w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_v \\ v_w \\ v_u \end{bmatrix} \\
 &= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 1/\sqrt{2} & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix} - \\
 &\quad \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 1/\sqrt{2} & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 1/\sqrt{2} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix} \\
 &= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 0 & 3/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & -3/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix} \dots\dots (35)
 \end{aligned}$$

線間電圧だけから中性点電圧が決まらないから，上式は $[v_0 \ v_\alpha \ v_\beta]^T$ については解けない。しかし， $[v_\alpha \ v_\beta]^T$ についてだけなら解くことができ，

$$\begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2/3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{uv} \\ v_{vw} \end{bmatrix} \dots\dots (36)$$

のように計算できる。

4. 一般二相モータ

4.1 一般二相モータの回路方程式 ここでは，図6に示した一般二相モータの回路方程式を示す。以下では，習慣に従い d 軸を主磁束の方向とし， dq 座標系で突極性を考慮する。 dq 軸の2巻線の巻数は等しく，また $\alpha\beta$ 軸の2巻線の巻数も等しいとする。また，添字 s で固定子を表し，添字 r で回転子を表す。図6(a)は固定界磁形モータであり，図6(b)は固定電機子形モータである。

4.1.1 固定界磁形モータ まず，図6(a)の固定界磁形モータのインダクタンス行列 $[L]$ を示す。ベクトルの転置を右肩の T で表すとき，磁束鎖交数が，

$$[\psi_{sd} \ \psi_{sq} \ \psi_{r\alpha} \ \psi_{r\beta}]^T = [L] [i_{sd} \ i_{sq} \ i_{r\alpha} \ i_{r\beta}]^T (37)$$

となるようにインダクタンス行列 $[L]$ の要素を配置すれば，(16)式より，

$$[L] = \begin{bmatrix} [L_{11}] & [L_{12}] \\ [L_{12}]^T & [L_{22}] \end{bmatrix} \dots\dots (38a)$$

$$[L_{11}] = \begin{bmatrix} \ell_s + L_{sd} & 0 \\ 0 & \ell_s + L_{sq} \end{bmatrix} \dots\dots (38b)$$

$$[L_{12}] = \begin{bmatrix} M_d \cos \theta & -M_d \sin \theta \\ M_q \sin \theta & M_q \cos \theta \end{bmatrix} \dots\dots (38c)$$

$$[L_{22}] = \begin{bmatrix} L_{r0} + L_{r1} \cos 2\theta & -L_{r1} \sin 2\theta \\ -L_{r1} \sin 2\theta & L_{r0} - L_{r1} \cos 2\theta \end{bmatrix} \dots\dots (38d)$$

$$L_{r0} \equiv \ell_r + \frac{L_{rd} + L_{rq}}{2}, \quad L_{r1} \equiv \frac{L_{rd} - L_{rq}}{2} \dots\dots (38e)$$

である[†]。このインダクタンス行列 (38a)-(38e) 式とファラデーの法則から誘導起電力を求め，さらに，巻線抵抗による電圧を考慮すれば，

$$\begin{bmatrix} v_{sd} \\ v_{sq} \\ v_{r\alpha} \\ v_{r\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_{r\alpha} \\ i_{r\beta} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \left([L] \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_{r\alpha} \\ i_{r\beta} \end{bmatrix} \right) \dots\dots (39)$$

のように，図6(a)の固定界磁形モータの回路方程式が得られる。

4.1.2 固定電機子形モータ 図6(b)の固定電機子形モータの回路方程式は次のようにして求められる。図6(a)と(b)の違いを考慮して，(38a)-(38e)式の $[L]$ に対して以下の変更を加える。

- (1) 固定子添字 s と回転子添字 r を入れ換える。
- (2) $\theta = -\theta'$ とする。
- (3) インダクタンス行列の要素を，磁束鎖交数が次式となるように入れ換える。

$$\begin{aligned}
 &[\psi_{s\alpha} \ \psi_{s\beta} \ \psi_{rd} \ \psi_{rq}]^T \\
 &= [L'] [i_{s\alpha} \ i_{s\beta} \ i_{rd} \ i_{rq}]^T \dots\dots (40)
 \end{aligned}$$

その結果，図6(b)のインダクタンス行列 $[L']$ は，(22)式より，

$$[L'] = \begin{bmatrix} [L'_{22}] & [L'_{12}]^T \\ [L'_{12}] & [L'_{11}] \end{bmatrix} \dots\dots (41a)$$

$$[L'_{22}] = \begin{bmatrix} L_{s0} + L_{s1} \cos 2\theta' & L_{s1} \sin 2\theta' \\ L_{s1} \sin 2\theta' & L_{s0} - L_{s1} \cos 2\theta' \end{bmatrix} \dots\dots (41b)$$

$$[L'_{12}]^T = \begin{bmatrix} M_d \cos \theta' & -M_q \sin \theta' \\ M_d \sin \theta' & M_q \cos \theta' \end{bmatrix} \dots\dots (41c)$$

$$[L'_{11}] = \begin{bmatrix} \ell_r + L_{rd} & 0 \\ 0 & \ell_r + L_{rq} \end{bmatrix} \dots\dots (41d)$$

$$L_{s0} \equiv \ell_s + \frac{L_{sd} + L_{sq}}{2}, \quad L_{s1} \equiv \frac{L_{sd} - L_{sq}}{2} \dots\dots (41e)$$

[†] 文献⁽¹⁾ p.80 の (4.22) 式を見やすく直した。

となる。ただし、(41a) 式の要素の並びは、(38a) 式と対応づけやすいように、通常の添字のつけ方と変えてあるから注意されたい。このインダクタンス行列 (41a)-(41e) 式と巻線抵抗を考慮すると、

$$\begin{bmatrix} v_{s\alpha} \\ v_{s\beta} \\ v_{rd} \\ v_{rq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \\ i_{rd} \\ i_{rq} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \\ i_{rd} \\ i_{rq} \end{bmatrix} \quad (42)$$

のように、図 6(b) の固定電機子形モータの回路方程式が得られる。

4・2 一般二相モータの発生トルク モータへの入力電力は、モータ内部の抵抗損失、内部磁気エネルギーを増減するもの、そして残りは機械出力となるものに分けられる。この機械出力を回転速度で除算すれば、一般二相モータの発生トルクを求めることができる。

まず、(39) 式を、電圧・電流・抵抗・インダクタンスのベクトルまたは行列をまとめて書き直すと次のようになる。

$$\begin{aligned} [v] &= [R][i] + \frac{d}{dt} [[L][i]] \\ &= [R][i] + [L] \frac{d[i]}{dt} + \dot{\theta} \frac{\partial [L]}{\partial \theta} [i] \dots \dots \dots (43) \end{aligned}$$

上式に左から $[i]^T$ を乗じて回転機の入力電力 P_i を求めれば、

$$\begin{aligned} P_i &= [i]^T [v] \\ &= [i]^T [R][i] + [i]^T [L] \frac{d[i]}{dt} + \dot{\theta} [i]^T \frac{\partial [L]}{\partial \theta} [i] \dots \dots \dots (44) \end{aligned}$$

となる。上式を変形する準備のため、インダクタンスに蓄えられる磁気エネルギーの時間微分を計算する。

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} [i]^T [L][i] \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{d[i]^T}{dt} [L][i] + [i]^T \frac{d[L]}{dt} [i] + [i]^T [L] \frac{d[i]}{dt} \right) \\ &= [i]^T [L] \frac{d[i]}{dt} + \frac{1}{2} [i]^T \dot{\theta} \frac{\partial [L]}{\partial \theta} [i] \dots \dots \dots (45) \end{aligned}$$

ただし、上式 2 行目右辺の第 1, 3 項は互いに等しい。なぜならば、それらはスカラーであり、(38a) 式に示したように $[L]$ は対称行列だからである。よって、3 行目が得られる。(45) 式を (44) 式に代入して、 $[i]^T [L] d[i]/dt$ を消去すれば、

$$\begin{aligned} P_i &= [i]^T [v] \\ &= [i]^T [R][i] + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} [i]^T [L][i] \right) + \\ &\quad \dot{\theta} \frac{1}{2} [i]^T \frac{\partial [L]}{\partial \theta} [i] \dots \dots \dots (46) \end{aligned}$$

となる。(46) 式右辺において、第 1 項は抵抗による電力損失、第 2 項はインダクタンスに蓄えられる磁気エネルギーの時間微分であり、残りの第 3 項が機械出力である。その機械出力を回転速度 $\dot{\theta}$ で割れば、発生トルク T が求まる。つまり、回路方程式に左から $[i]^T$ を乗じて電力 P_i を計算し、その中で $\dot{\theta}$ のつく項だけを合計して機械出力を求め、

それから $\dot{\theta}$ を除けば発生トルク T が求まる[†]。

$$T = \frac{1}{2} [i]^T \frac{\partial [L]}{\partial \theta} [i] \dots \dots \dots (47)$$

ここで、回転機の極対数が p のときは、機械的な角速度 $\dot{\theta}_M$ およびトルク T_M は、次式で与えられる。

$$\dot{\theta}_M = \dot{\theta}/p, \quad T_M = pT \dots \dots \dots (48)$$

(42) 式の場合も、 $[L] \Rightarrow [L']$, $\theta \Rightarrow \theta'$ とすれば上記と同様に同じ結果になる。

4・3 円筒機と突極機の発生トルク計算例 前項で求めた発生トルク (47) 式を具体例で計算してみよう。

まず、円筒機の場合は、インダクタンス行列が (18) 式であるから、それを回転角度 θ で偏微分すれば

$$\frac{\partial [L]}{\partial \theta} = M \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin \theta & -\cos \theta \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ -\cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots (49)$$

これを (47) 式に代入すれば、円筒機の発生トルク T_q が

$$\begin{aligned} T_q &= \frac{1}{2} [i]^T \frac{\partial [L]}{\partial \theta} [i] \\ &= \frac{1}{2} [i_{sd} \quad i_{sq} \quad i_{r\alpha} \quad i_{r\beta}] M \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin \theta & -\cos \theta \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ -\cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_{r\alpha} \\ i_{r\beta} \end{bmatrix} \\ &= i_{r\alpha} (-M i_{sd} \sin \theta + M i_{sq} \cos \theta) - \\ &\quad i_{r\beta} (M i_{sd} \cos \theta + M i_{sq} \sin \theta) \\ &= i_{r\alpha} \psi_{r\beta} - i_{r\beta} \psi_{r\alpha} \dots \dots \dots (50) \end{aligned}$$

ただし、

$$\psi_{r\beta} = -M_d i_{sd} \sin \theta + M_q i_{sq} \cos \theta \dots \dots \dots (51a)$$

$$\psi_{r\alpha} = M_d i_{sd} \cos \theta + M_q i_{sq} \sin \theta \dots \dots \dots (51b)$$

である。ここで、 $\psi_{r\beta}$ は固定子 S 巻線の電流が作る磁束鎖交数の回転子 $r\beta$ 軸方向成分、 $\psi_{r\alpha}$ は固定子 S 巻線の電流が作る磁束鎖交数の回転子 $r\alpha$ 軸方向成分である^{††}。

同じことを突極機の場合にやってみよう。突極機のインダクタンス行列は (16) 式で与えられているから、それを θ で偏微分すれば

[†] (46) 式右辺第 3 項の 1/2 に関しては、研究ノート D-13 pp.43-45 を参照のこと。

^{††} ただし、このことは次章の回転座標変換を勉強しないと分かりにくい!

$$\frac{\partial[L]}{\partial\theta} = \begin{matrix} s_d & s_q & r_\alpha \\ \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & -M_d \sin \theta \\ 0 & 0 & M_q \cos \theta \\ -M_d \sin \theta & M_q \cos \theta & -(L_{rd} - L_{rq}) \sin 2\theta \\ -M_d \cos \theta & -M_q \sin \theta & -(L_{rd} - L_{rq}) \sin 2\theta \end{array} \right] \\ r_\beta \\ \left[\begin{array}{c} -M_d \cos \theta \\ -M_q \sin \theta \\ -(L_{rd} - L_{rq}) \cos 2\theta \\ (L_{rd} - L_{rq}) \sin 2\theta \end{array} \right] \end{matrix} \dots\dots\dots (52)$$

となる。これを(47)式に代入すれば突極機の発生トルク T_q は

$$T_q = i_{r\alpha} (-M_d i_{sd} \sin \theta + M_q i_{sq} \cos \theta) - i_{r\beta} (M_d i_{sd} \cos \theta + M_q i_{sq} \sin \theta) - (L_{rd} - L_{rq}) i_{r\alpha} i_{r\beta} \cos 2\theta - \frac{L_{rd} - L_{rq}}{2} (i_{r\alpha}^2 - i_{r\beta}^2) \sin 2\theta \dots\dots\dots (53)$$

となる。上式右辺第1, 2項に, (51a) と (51b) を適用すれば,

$$T_q = i_{r\alpha} \psi_{r\beta} - i_{r\beta} \psi_{r\alpha} - (L_{rd} - L_{rq}) i_{r\alpha} i_{r\beta} \cos 2\theta - \frac{L_{rd} - L_{rq}}{2} (i_{r\alpha}^2 - i_{r\beta}^2) \sin 2\theta \dots\dots\dots (54)$$

となる。上式右辺の第1, 2項はフレミングの左手則に相当し, 第3, 4項は***3.1.3項†***に示されたリラクタンストルクである。

5. 回転座標変換

5.1 二次元ベクトルの回転座標変換

ベクトルを観測する座標系を図7に示すように回転すると座標値が変わる。このような場合に, 回転座標変換が用いられる。図7(a)において $\dot{\theta} = \omega$ ならば, $\alpha\beta$ 座標系からベクトルが止まってみても, dq 座標系からみれば ω でくるくる回ってみえる。言い換えると, dq 座標系からみたとき ω でくるくる回ってみえるベクトルがあったなら, $\alpha\beta$ 座標系に乗り換えれば止まってみえる。回転座標変換とは, このことを数学的に表現したものである。

図7(a)のように d 軸から α 軸へ角度 θ を測るときは, 二相量 (d, q) と (α, β) との変換は, 次式となる。

$$\begin{bmatrix} d \\ q \end{bmatrix} = C(\theta) \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \dots\dots\dots (55a)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = C(-\theta) \begin{bmatrix} d \\ q \end{bmatrix} \dots\dots\dots (55b)$$

$$C(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \dots\dots\dots (55c)$$

† 難波江ほか⁽¹⁾ p.56

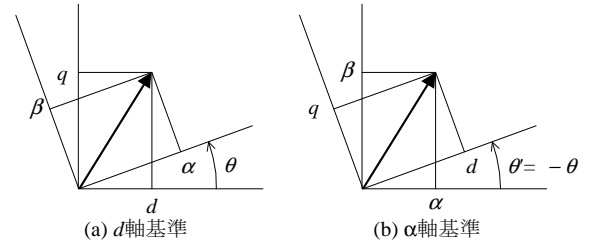


図7 回転座標変換

図7(b)のように角度の測り方を変えたほうがよいこともある。電機子巻線が固定子 $\alpha\beta$ 軸にある回転機では, 図7(b)のようにすれば電気的回転方向と機械的回転方向が一致する。このときは, (55a)-(55c) 式において $\theta = -\theta'$ とすればよい。

5.2 複素数による表記 二相の電圧・電流は二次元実数ベクトルで表せるが, 複素数で表すこともできる。複素数と二次元実数ベクトルとの対応は, あとで表1に示す。

回転座標変換は, 複素数の極座標表現を使ったほうが位相角を加算できるから簡略になる。すなわち, 図7(a)の座標系の回転座標変換は, 複素数を使って $x_{dq} = d + jq$ および $x_{\alpha\beta} = \alpha + j\beta$ とすれば,

$$x_{dq} = \exp(j\theta)x_{\alpha\beta} = (\cos \theta + j \sin \theta)(\alpha + j\beta) \dots\dots\dots (56)$$

である。この式は, 複素平面で $\exp(j\theta)$ を乗じれば位相が θ だけ増えるという, あたりまえのことを示している^{††}。このことは, 表1のNo.3に示したように, 回転座標変換(55a)式に対応している。つまり, 位相を増やすという意味が, 複素数表現(56)式のほうが二次元実数ベクトル表現(55a)式よりも鮮明に分かる。

ここで, (56)式を時間で微分すると,

$$\frac{dx_{dq}}{dt} = \frac{d}{dt} (\exp(j\theta)x_{\alpha\beta}) = \exp(j\theta) \left(\frac{d}{dt} + j\dot{\theta} \right) x_{\alpha\beta} \dots\dots (57)$$

となる。この式は, 回路方程式を回転座標変換するときに出てくる時間微分項を処理するため頻繁に使用される。

5.3 複素数と二次元ベクトル 二相回転機の回転座標変換を, 二次元ベクトルでやると \cos, \sin , および, 加法定理がいやになるほど出てくる。それに比べて, 複素数表記を用いれば \cos と \sin を追放できる。ここでは「複素数の世界」と「二次元ベクトルの世界」を行き来するときに必要となる知識を整理しておく。特に大切なのは, 5.3.4項である。

以下, までは退屈だから, 忙しい人はへ直行!

5.3.1 複素数の復習 よく見かける複素数の定義は, 次のようになっている。

実数 x_r, x_i と虚数単位 $j^2 = -1$ を用いて,

$$x = x_r + jx_i \dots\dots\dots (58)$$

†† 図7(a)をみよ。同じベクトルをみても d 軸からの位相角のほうが θ だけ大きい。

と書かれる数 x を「複素数」と呼び、複素数が等しいことと四則演算を次のように定義する。

$$x_r + jx_i = y_r + jy_i \Leftrightarrow x_r = y_r \text{ かつ } x_i = y_i \dots\dots (59a)$$

$$(x_r + jx_i) \pm (y_r + jy_i) \equiv (x_r \pm y_r) + j(x_i \pm y_i) \dots (59b)$$

$$(x_r + jx_i) \times (y_r + jy_i) \equiv (x_r y_r - x_i y_i) + j(x_r y_i + x_i y_r) \dots\dots\dots (59c)$$

$$(x_r + jx_i) \div (y_r + jy_i) \equiv (x_r y_r + x_i y_i) / Y + j(x_i y_r - x_r y_i) / Y \dots\dots (59d)$$

ただし、 $Y \equiv y_r^2 + y_i^2 \neq 0$ である。単なる実数は $x_r + j0 = x_r$ のように書くことが多い。

しかし、上の定義は虚数単位 j が天降り的に導入されており、 j が本当に存在するのかと考えると、不満足である。これを避けるには次のようにする。

まず、二つの実数の組を (x_r, x_i) と書くことにする。ここで、上の定義をそっくりまねして、次のように定義する。

$$(x_r, x_i) = (y_r, y_i) \Leftrightarrow x_r = y_r \text{ かつ } x_i = y_i \dots\dots (60a)$$

$$(x_r, x_i) \pm (y_r, y_i) \equiv (x_r \pm y_r, x_i \pm y_i) \dots\dots\dots (60b)$$

$$(x_r, x_i) \times (y_r, y_i) \equiv (x_r y_r - x_i y_i, x_r y_i + x_i y_r) \dots\dots (60c)$$

$$(x_r, x_i) \div (y_r, y_i) \equiv \left(\frac{x_r y_r + x_i y_i}{Y}, \frac{x_i y_r - x_r y_i}{Y} \right) \dots (60d)$$

ただし、 $Y \equiv y_r^2 + y_i^2 \neq 0$ である。

こうすれば、実数の組 (x_r, x_i) が「普通の複素数」に対応する。単なる実数は $x_r = (x_r, 0)$ である。実数の組 $(0, 1)$ は確かに存在するし、それが虚数単位 j に相当する。なぜなら、上の積の定義 (60c) 式から $(0, 1) \times (0, 1) = (-1, 0)$ だからである。したがって、虚数単位 j も確かに存在することになる。よって、ちょっと気味の悪い $j^2 = -1$ を避けることができた。けれども退屈だね！

忙しい人はここからスタート

そこで、頭のいい人[†]は、次のようにピンときたでしょう！

『二つの実数の組は、二次元数ベクトルだ。したがって、複素数と二次元数ベクトルを同一視できそうだ。』

しかし、複素数と二次元ベクトルは完全には一対一に対応しない。たとえば、複素数同士の積は複素数になるが、二次元数ベクトル同士の積は二次元数ベクトルにならない。つまり、下のようにはできない^{††}。

$$\begin{bmatrix} x_r \\ x_i \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_r \\ y_i \end{bmatrix} \quad ????????? \dots\dots\dots (61)$$

そこで、複素数の積に対応づけるために、次のようにする。二次元数ベクトルは、2行1列の行列のことだ。行列の積では左と右を入換えられない。左の掛けるもの（加害者、作用するもの）と右の掛けられるもの（被害者、作用

[†] そうあなたのことです！
^{††} 左の二次元ベクトルを転置してもダメ。結果がスカラーになっちゃうから。右を…ウッ！

されるもの)を区別する^{†††}。
 複素数の積と二次元数ベクトルの対応を次のようにする。

$$(x_r + jx_i) \times (y_r + jy_i) = x_r y_r - x_i y_i + j(x_r y_i + x_i y_r) \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_r & -x_i \\ x_i & x_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_r \\ y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_r y_r - x_i y_i \\ x_r y_i + x_i y_r \end{bmatrix} \dots\dots\dots (62)$$

二次元数ベクトルの1行目が実部に、2行目が虚部に対応していることが分かる。複素数なら積の左も右も同じ複素数であるが、二次元数ベクトルでは積の左と右が、それぞれ、行列（加害者）とベクトル（被害者）というように顔が変わる。面倒だけど、仕方がない^{††††}。

ところで、上の 2×2 行列は、たった二つの要素で決まっている（対角要素が x_r で、非対角要素が x_i 。これをシュワルツ形行列という。）。よって、上の 2×2 行列を 二次元数ベクトルもどき としよう。この「 2×2 行列」の性質を調べておこう。ただし、 x_r と x_i が0でないときだけ。

$$\begin{bmatrix} x_r & -x_i \\ x_i & x_r \end{bmatrix} = X \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \dots\dots\dots (63a)$$

ただし、

$$X \equiv \sqrt{x_r^2 + x_i^2}, \quad \theta \equiv \tan^{-1} \left(\frac{x_i}{x_r} \right) \dots\dots\dots (63b)$$

上式から、加害者「 2×2 行列」は（被害者）ベクトルに襲い掛かりそれを複素平面の原点を中心にして X 倍に引き伸ばして、正の角度 θ だけくると回してしまうだけである。なお、 $x_r = x_i = 0$ のときは、被害者を抹殺する殺人鬼（作用すると結果が0になる）になるから除いておいたわけだ。

5.3.2 オイラーの公式 虚数 $j\theta$ を右肩にもつ指数関数、つまり、

$$e^{j\theta} \equiv \exp(j\theta) = \cos(\theta) + j \sin(\theta) \dots\dots\dots (64)$$

をオイラーの公式という。前項 (63a) 式の正の角度 θ だけくると回してまう行列は、複素数ではこの $\exp(j\theta)$ に対応する。つまり、

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \Leftrightarrow \exp(j\theta) \dots\dots\dots (65)$$

というふうに、「二次元ベクトルの世界」と「複素数の世界」が対応する。

二つの指数関数の積は、

$$e^x e^y = e^{x+y} \dots\dots\dots (66)$$

となる。そこで、上式の指数部が虚数のときを考えてみよ

^{†††} 加害者と被害者がそろったから、種明かし。ジャンジャン～！（参考文献 杉浦⁽³⁾）

^{††††} ところで、 n 次元数ベクトル空間に加法と乗法を定義して、しかも、積を可換にできるのは、 $n = 1, 2$ の二つだけである。その二つとは、実数体と複素数体のこと。積が可換でなくてもよければ、 $n=4$ のときは非可換体となりハミルトンの4元数体という…。なんて、えらそうに杉浦⁽³⁾ p.42 の受け売り。

う。つまり、

$$e^{j\alpha}e^{\pm j\beta} = e^{j(\alpha\pm\beta)} = \cos(\alpha \pm \beta) + j \sin(\alpha \pm \beta) \dots (67a)$$

$$= (\cos \alpha + j \sin \alpha)(\cos \beta \pm j \sin \beta) \dots (67b)$$

$$= (\cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta) + j(\sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta) \dots (67c)$$

上の(67a)式と(67c)式を、それぞれ、実部と虚部に分けて比較してみれば、毎度おなじみの三角関数の加法定理が出てきてしまった。実は、このことが、回転座標変換を複素数表記でやると加法定理を一切使わなくてもよい仕掛けになっている。

5.3.3 複素数の実部と虚部に分ける ところで、上で「実部と虚部に分けて…」といったけど、二つの方法がある。まず、次のようにすればよい。

$$x_r = \text{Re}(x_r + jx_i), \quad x_i = \text{Im}(x_r + jx_i) \dots (68)$$

実部と虚部をそれぞれ取り出すために、二つの関数 $\text{Re}()$ 、 $\text{Im}()$ が必要です。こんな簡単な仕事に関数を二つも使うなんて、ちょっともったいない。

実部と虚部に分ける、もう一つの方法は共役[†]を使う。つまり、

$$x_r = \frac{x + x^*}{2} = \frac{(x_r + jx_i) + (x_r - jx_i)}{2} = \frac{2x_r}{2} \dots (69a)$$

$$x_i = (-j) \frac{x - x^*}{2} = (-j) \frac{(x_r + jx_i) - (x_r - jx_i)}{2} = (-j) \frac{2jx_i}{2} \dots (69b)$$

上式は、分母を2jにしておけば、カッコいい。しかし、こうしておいたほうが後で行列との対応を考えるときに便利である。

共役のほうが、 $\text{Re}()$ 、 $\text{Im}()$ よりも便利なことを説明しておこう。 $\text{Re}()$ 、 $\text{Im}()$ は、複素数があらかじめ直角座標表現になっていて実部と虚部に分かれているときはいいけど、極座標表現のときには不便だ(実部を取り出すのに絶対値に \cos を掛ける!)。それに比べると、共役は、直角座標表現でも極座標表現でもどちらも虚部の符号を反転するだけでいい。そもそも複素数表現を導入した背景には、回転座標変換の \cos と \sin の加法定理を追放したかったことがある。 $\text{Re}()$ を使うと \cos が顔を出しかねないから、複素数表記の計算では $\text{Re}()$ を使わずに共役を使ったほうがよい。

共役を使った公式をまとめておこう。

$$(x \pm y)^* = x^* \pm y^* \dots (70a)$$

$$(xy)^* = x^* y^* \dots (70b)$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^* = \frac{x^*}{y^*} \dots (70c)$$

$$xx^* = |x|^2 \Leftarrow \text{こいつは本当に役に立つ} \dots (70d)$$

$$\text{Im}(xx^*) \equiv 0 \dots (70e)$$

[†] 実部と虚部を取り出す二つの仕事に共に役に立つから、「共役」なんちゃって。(これ、シャレだからね!「共役」の本当の意味は違うからね。)

おまけ:

- (1) 複素平面で考えると、共役複素数は、元の複素数を実軸に対して折り返したものだ。
- (2) 正方向にくるくる回る複素数の共役を作ると、負方向にくるくる回り出す。
- (3) 二相回転機の一相だけに交流をくわえると交番磁界ができる。二回転磁界理論によれば、交番磁界は正方向と負方向にくるくる回る二つの成分に分けて考えることができる。このようなときには、共役を導入すると便利だ。
- (4) 二相回転機に突極性があると、d軸インダクタンスとq軸インダクタンスがそれぞれに単相交流的に変化するから、このときも共役複素数が出てくる。

5.3.4 任意の2x2行列を複素数で表現する 振り返ってみると、複素数の話から始めて、二次元ベクトルの世界に入りこんでしまった。ここでは、逆に、「二次元ベクトルの世界」を「複素数の世界」に翻訳する方法を考える。前に出てきた、加害者の「2x2行列」は

$$\begin{bmatrix} x_r & -x_i \\ x_i & x_r \end{bmatrix}$$

と、たった二つの実数 x_r と x_i だけで表せる。だけど、世の中はそんなに甘くない。すくなくとも、二軸理論では突極形回転機のインダクタンス行列は非対称で、おまけに対角要素まで異なる^{††}。

一般の2x2行列は、

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \dots (71)$$

というふうに、四つの要素が全部異なっていたりする。この行列を複素数で表す方法を示しておこう。

以下に示す方法は、上の行列(71)式を複素数で表す方法として、エレガントではない。しかし、なんとかできる。(もっとエレガントな方法があれば、私は知りたい。)

まず、次の四つの行列

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \dots (72a)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \dots (72b)$$

を考える。この四つから、次のように2x2行列で一つの要素だけが1になるもの

$$\frac{A_1 + A_3}{2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{A_1 - A_3}{2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (73a)$$

$$\frac{A_2 + A_4}{2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{-A_2 + A_4}{2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (73b)$$

を作ることができる。そこで、上の各式にそれぞれ $a, d, c,$

^{††} (38c), (38d), (41b), (41c) 式を見よ。

表 1 複素数と実数ベクトルの対応

No.	複素数	二次元実数ベクトル
1	$(A + jB)(x + jy)$ $= (Ax - By) + j(Bx + Ay)$	$\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax - By \\ Bx + Ay \end{bmatrix}$
2	$\blacksquare \times \exp(j\theta)$	$\begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}$
3	$\exp(j\theta) \times \blacksquare$	$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix}$
4	$j \times \blacksquare$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix}$
5	複素共役 $\text{conj}(\blacksquare)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix}$
6	$j \times \text{conj}(\blacksquare)$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix}$

- (注 1) \blacksquare は複素数, \square は実数である。
 (注 2) 複素数の実部がベクトル 1 行目に, 虚部がベクトル 2 行目に対応する。
 (注 3) $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ のとき, $\frac{A_1 + A_3}{2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\frac{A_1 - A_3}{2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\frac{A_2 + A_4}{2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\frac{-A_2 + A_4}{2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ である。

b を掛けていって全部足したら, 前に出てきた行列 (71) 式になる。つまり, A_1, A_2, A_3, A_4 をそれぞれ複素数で表すことができれば, 行列 (71) 式を複素数に対応づけることができる。

上の四つの行列 (72a), (72b) 式は, それぞれ, 次のように (加害者モードの) 複素数で表現できる。

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \text{複素数なら } 1 \text{ を掛ければよい。} \dots\dots\dots (74a)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \text{複素数なら } \exp(j\pi/2) = j \text{ を掛ける。} \dots\dots (74b)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \text{複素数なら 共役作用素, } \text{conj}() \text{ です。} \dots (74c)$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \text{複素数なら } j \times \text{conj}() \text{ です。} \dots\dots\dots (74d)$$

以上に述べたことをまとめたものが, 表 1 である。

5・4 二相回転機の複素数表記の例 固定子に電機子巻線がある二相回転機のインダクタンス行列は, (41a)-(41e) 式に示したが, それをもう一度書いておく。

$$[L'] = \begin{bmatrix} [L'_{22}] & [L'_{12}]^T \\ [L'_{12}] & [L'_{11}] \end{bmatrix} \dots\dots\dots (75a)$$

ただし, 上式の要素の並びは, (38a) 式と対応づけやすいように, 通常の添字のつけ方と変えてあるから注意されたい。

$$[L'_{22}] = \begin{bmatrix} L_{s0} + L_{s1} \cos 2\theta' & L_{s1} \sin 2\theta' \\ L_{s1} \sin 2\theta' & L_{s0} - L_{s1} \cos 2\theta' \end{bmatrix} \dots (75b)$$

$$[L'_{12}]^T = \begin{bmatrix} M_d \cos \theta' & -M_q \sin \theta' \\ M_d \sin \theta' & M_q \cos \theta' \end{bmatrix} \dots\dots\dots (75c)$$

$$[L'_{11}] = \begin{bmatrix} \ell_r + L_{rd} & 0 \\ 0 & \ell_r + L_{rq} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (75d)$$

$$L_{s0} \equiv \ell_s + \frac{L_{sd} + L_{sq}}{2}, \quad L_{s1} \equiv \frac{L_{sd} - L_{sq}}{2} \dots\dots\dots (75e)$$

さらに, 巻線抵抗を考慮すると, 固定電機子形の二相回転機の回路方程式は次式となる。

$$\begin{bmatrix} v_{s\alpha} \\ v_{s\beta} \\ v_{rd} \\ v_{rq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \\ i_{rd} \\ i_{rq} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \left([L'] \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \\ i_{rd} \\ i_{rq} \end{bmatrix} \right) \dots (76)$$

上に示した固定子に電機子巻線がある二相回転機のインダクタンス行列 $[L']$ の複素数表現を求めよう。

(75b) 式に (74a)-(74d) 式を適用して複素数表現を求めると,

$$[L'_{22}] = L_{s0}A_1 + L_{s1}(\cos 2\theta'A_3 + \sin 2\theta'A_4) \quad (77a)$$

$$\Leftrightarrow L_{s0} + L_{s1}(\cos 2\theta' \text{conj}() + \sin 2\theta' \cdot j \cdot \text{conj}()) \\ = L_{s0} + L_{s1} \exp(j2\theta') \text{conj}() \quad (77b)$$

(75c) 式に (73b), (74a)-(74d) 式を適用して複素数表現を求めると,

$$[L'_{12}]^T = M_d \cos \theta' \frac{A_1 + A_3}{2} + M_q \cos \theta' \frac{A_1 - A_3}{2} + \\ M_d \sin \theta' \frac{A_2 + A_4}{2} + M_q \sin \theta' \frac{A_2 - A_4}{2} \\ = \frac{M_d + M_q}{2} (\cos \theta' A_1 + \sin \theta' A_2) + \\ \frac{M_d - M_q}{2} (\cos \theta' A_3 + \sin \theta' A_4) \quad (78a)$$

$$\Leftrightarrow \frac{M_d + M_q}{2} (\cos \theta' + \sin \theta' \cdot j) + \\ \frac{M_d - M_q}{2} (\cos \theta' + \sin \theta' \cdot j) \text{conj}() \\ = \frac{M_d + M_q}{2} \exp(j\theta') + \\ \frac{M_d - M_q}{2} \exp(j\theta') \text{conj}() \\ = M_0 \exp(j\theta') + M_1 \exp(j\theta') \text{conj}() \quad (78b)$$

$$\begin{aligned}
[L'_{12}] &= M_d \cos \theta' \frac{A_1 + A_3}{2} + M_q \cos \theta' \frac{A_1 - A_3}{2} + \\
&\quad M_q \sin \theta' \frac{-A_2 - A_4}{2} + M_d \sin \theta' \frac{-A_2 + A_4}{2} \\
&= \frac{M_d + M_q}{2} (\cos \theta' A_1 - \sin \theta' A_2) + \\
&\quad \frac{M_d - M_q}{2} (\cos \theta' A_3 + \sin \theta' A_4) \quad (78c) \\
&\Leftrightarrow \frac{M_d + M_q}{2} (\cos \theta' - \sin \theta' \cdot j) + \\
&\quad \frac{M_d - M_q}{2} (\cos \theta' + \sin \theta' \cdot j) \text{conj}() \\
&= \frac{M_d + M_q}{2} \exp(-j\theta') + \\
&\quad \frac{M_d - M_q}{2} \exp(j\theta') \text{conj}() \\
&= M_0 \exp(-j\theta') + M_1 \exp(j\theta') \text{conj}() \quad (78d)
\end{aligned}$$

ただし,

$$M_0 \equiv \frac{M_d + M_q}{2}, \quad M_1 \equiv \frac{M_d - M_q}{2} \dots \dots \dots (78e)$$

(75d) 式に (74a)-(74d) 式を適用して複素数表現を求めると,

$$\begin{aligned}
[L'_{11}] &= (\ell_r + L_{rd}) \frac{A_1 + A_3}{2} + (\ell_r - L_{rq}) \frac{A_1 - A_3}{2} \\
&= (\ell_r + \frac{L_{rd} + L_{rq}}{2}) A_1 + \frac{L_{rd} - L_{rq}}{2} A_3 \quad (79a)
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow L_{r0} + L_{r1} \text{conj}() \quad (79b)$$

以上をまとめると, 固定電機子形二相回転機のインダクタンス行列の複素数表現は,

$$\begin{aligned}
[L'] &= \begin{bmatrix} L_{s0} + L_{s1} \exp(j2\theta') \text{conj}() \\ M_0 \exp(-j\theta') + M_1 \exp(j\theta') \text{conj}() \\ M_0 \exp(j\theta') + M_1 \exp(j\theta') \text{conj}() \\ L_{r0} + L_{r1} \text{conj}() \end{bmatrix} \dots \dots \dots (80)
\end{aligned}$$

のように求められた。ただし, conj() は複素共役を作る演算子で, 右側に何かくるとそいつに襲い掛かる (微分演算子と同じ)。

6. 誘導電動機とベクトル制御

ここでは, 誘導機の回路方程式と発生トルク式から出発して, 直接形および間接形ベクトル制御の制御式を導出する[†]。

6・1 かが形誘導モータの回路方程式 かが形誘導モータの回路方程式は, 次のようにして求められる。

(1) 電機子巻線が固定子にあるから, 図 6(b) が適し, (42) 式を用いる。

(2) 非突極機であるからインダクタンス行列 (41a)-(41e) 式で次のようにおく。

$$M \equiv M_d = M_q$$

$$L_{ss} \equiv \ell_s + L_{sd} = \ell_s + L_{sq}$$

$$L_{rr} \equiv \ell_r + L_{rd} = \ell_r + L_{rq}$$

(3) 回転子の巻線は短絡されているから, $v_{rd} = v_{rq} = 0$ である。

(4) 図 6(b) の dq 軸上の回転子巻線は界磁巻線ではなく, dq 軸を後で別の意味に用いるから, 添字を $d \Rightarrow \gamma, q \Rightarrow \delta$ のように置き換える。

以上を (42) 式に適用すれば, かが形誘導モータの回路方程式は,

$$\begin{bmatrix} v_{s\alpha} \\ v_{s\beta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + DL_{ss} & 0 \\ 0 & R_s + DL_{ss} \\ DM \cos \theta' & DM \sin \theta' \\ -DM \sin \theta' & DM \cos \theta' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \\ i_{r\gamma} \\ i_{r\delta} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (81)$$

となる。ただし, 微分演算子 $D \equiv d/dt$ である。

上式は, 実際の誘導モータのように固定子巻線と回転子巻線がそれぞれ別の座標系になっているが, 使いにくい。その理由は, 微分演算子に角度 θ' 依存項がつくため, (81) 式を用いたシミュレーションでは微分方程式を数値計算するときの時間刻み幅を小さくする必要があり, 計算時間が長くなるからである。

座標系を統一するため, 回転座標変換を以下のように適用する。準備として (81) 式を複素数で表記すると,

$$\begin{bmatrix} v_{s\alpha\beta} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + DL_{ss} & DM \exp(j\theta') \\ DM \exp(-j\theta') & R_r + DL_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s\alpha\beta} \\ i_{r\gamma\delta} \end{bmatrix} \dots \dots (82)$$

となる。上式の固定子と回転子を新 dq 座標系に統一する。ただし, 新 d 軸は, 図 6(b) の α 軸から正の角度 θ_0 の位置にあるものとする。(82) 式に回転座標変換,

$$\begin{bmatrix} i_{s\alpha\beta} \\ i_{r\gamma\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(j\theta_0) & 0 \\ 0 & \exp(j(\theta_0 - \theta')) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sdq} \\ i_{rdq} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (83)$$

を適用する (上式は電流の変換式であるが, 電圧の変換式は $i \Rightarrow v$ とすればよい)。その結果, 新 dq 座標系に統一したかが形誘導機の回路方程式は,

$$\begin{bmatrix} v_{sdq} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + (D + j\dot{\theta}_0)L_{ss} \\ (D + j(\dot{\theta}_0 - \dot{\theta}'))M \\ (D + j\dot{\theta}_0)M \\ R_r + (D + j(\dot{\theta}_0 - \dot{\theta}'))L_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sdq} \\ i_{rdq} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (84)$$

となる。ただし, $\dot{\theta}'$ はステータからみたロータの機械的な回転角速度である。また, θ_0 はステータの α 軸から新 d 軸への角度であり, 用途に応じて任意に定めてよい。高速トルク制御系などでは, 上式の新 d 軸を磁束鎖交数ベクトルの

[†] 研究ノート D-14 pp.2-5 参照

方向に一致させることが多い。このとき、上式では微分演算子に角度 θ' 依存項がつかず、シミュレーションの積分時間刻み幅を大きくしても誤差が小さい。(84) 式の複素数表現を、 dq 座標系の実数ベクトルで表すと次のようになる。

$$\begin{bmatrix} v_{sd} \\ v_{sq} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + DL_{ss} & -\dot{\theta}_0 L_{ss} \\ \dot{\theta}_0 L_{ss} & R_s + DL_{ss} \\ DM & -(\dot{\theta}_0 - \dot{\theta}')M \\ (\dot{\theta}_0 - \dot{\theta}')M & DM \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_{rd} \\ i_{rq} \end{bmatrix} \dots (85)$$

発生トルク式は、(46) 式の下に述べた方法を (84) 式に適用して求めると、

$$T = M(i_{sq}i_{rd} - i_{sd}i_{rq}) = M\text{Im}(i_{rdq}^* i_{sdq}) \dots (86)$$

となる。ただし、 Im は虚数部、 $*$ は複素共役を表す。

6・2 ロータ磁束鎖交数の導入 (84) 式の 2 行目を見やすい形にまとめるために、ロータ巻線の磁束鎖交数を導入する。まず、ロータ巻線の磁束鎖交数を次式で定義する。

$$\lambda_{rdq} \equiv M i_{sdq} + L_{rr} i_{rdq} \dots (87)$$

(87) 式を使って、(84) 式の 2 行目を变形すると

$$\begin{aligned} 0 &= (D + j(\dot{\theta}_0 - \dot{\theta}'))M i_{sdq} + \\ &\quad R_r i_{rdq} + (D + j(\dot{\theta}_0 - \dot{\theta}'))L_{rr} i_{rdq} \\ &= R_r i_{rdq} + (D + j(\dot{\theta}_0 - \dot{\theta}'))\lambda_{rdq} \dots (88) \\ &= -\frac{R_r M}{L_{rr}} i_{sdq} + \frac{R_r}{L_{rr}} \lambda_{rdq} + (D + j(\dot{\theta}_0 - \dot{\theta}'))\lambda_{rdq} \dots (89) \end{aligned}$$

となる。ただし、(88) 式から (89) 式の変形に再び (87) 式を使って、 i_{rdq} を消去して i_{sdq} を残していることに注意する[†]。(89) 式を变形して、実数表記すると次式を得る。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda_{rd} \\ \lambda_{rq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_r}{L_{rr}} & \dot{\theta}_0 - \dot{\theta}' \\ -(\dot{\theta}_0 - \dot{\theta}') & -\frac{R_r}{L_{rr}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{rd} \\ \lambda_{rq} \end{bmatrix} + \frac{R_r M}{L_{rr}} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{bmatrix} \dots (90)$$

次項では、(90) 式を基にトルク制御法を検討する。

一方、トルク (86) 式を磁束鎖交数 (87) 式を使って变形すると、

$$\begin{aligned} T &= M\text{Im} \left(\frac{1}{L_{rr}} (\lambda_{rdq}^* - M i_{sdq}^*) i_{sdq} \right) \\ &= \frac{M}{L_{rr}} \text{Im} (\lambda_{rdq}^* i_{sdq}) \\ &= \frac{M}{L_{rr}} (\lambda_{rd} i_{sq} - \lambda_{rq} i_{sd}) \dots (91) \end{aligned}$$

ただし、上式の 1 行目から 2 行目の変形には、恒等式 $\text{Im}(i^* i) \equiv 0$ を使った。

[†] ロータ電流は、所詮、観ることも触ることができないから。

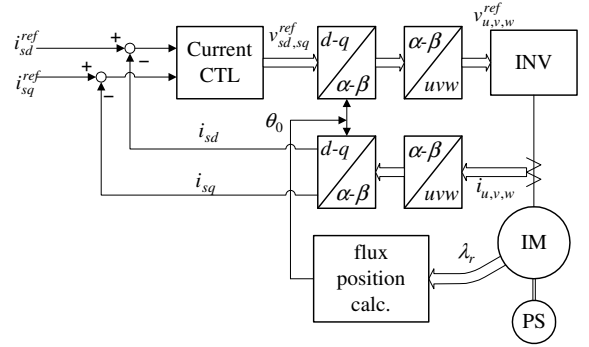


図 8 磁束センサつき直接形ベクトル制御系

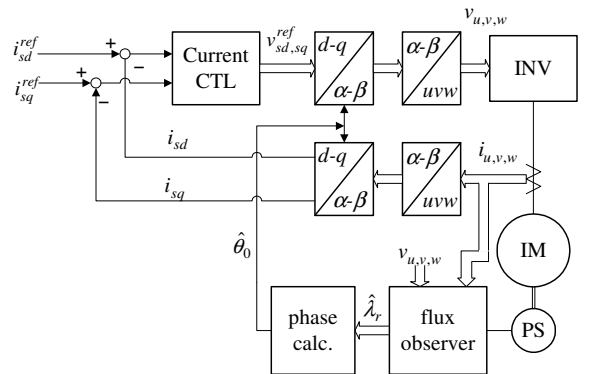


図 9 磁束オブザーバ使用の直接形ベクトル制御系

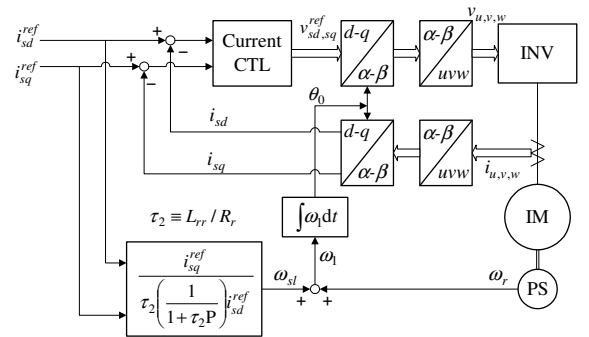


図 10 間接形ベクトル制御系

6・3 直接形ベクトル制御 いわゆる直接形ベクトル制御では、ロータ磁束鎖交数ベクトル λ_r が何らかの方法で検出できるものと仮定する。このため、直接形ベクトル制御は、磁束フィードバック形ベクトル制御とも呼ばれる。

直接形ベクトル制御系のブロック図を図 8, 9 に示す。図 8 は磁束センサを用いる場合で、図 9 は磁束オブザーバを用いる場合である。

検出されたロータ磁束鎖交数ベクトル λ_r に基づいて、その方向を d 軸と定めれば、その q 軸成分は 0 となる。つまり、

$$\lambda_{rd} = |\lambda_r| \dots (92a)$$

$$\lambda_{rq} = 0 \dots (92b)$$

となる。上の2式を(91)式へ代入すれば、トルクは、

$$T = \frac{M}{L_{rr}} \lambda_{rd} i_{sq} \dots \dots \dots (93)$$

となる。これは、 i_{sq} が満たすべき方程式である。

一方、 i_{sd} が満たすべき方程式は、(90)式の1行目と(92b)式から、

$$\frac{d}{dt} \lambda_{rd} = -\frac{R_r}{L_{rr}} \lambda_{rd} + \frac{R_r M}{L_{rr}} i_{sd} \dots \dots \dots (94)$$

となる。

トルク指令値 T^{ref} とロータ磁束鎖交数の指令値 λ_{rd}^{ref} が与えられたときには、(93)式と(94)式を満たすようにするために、ステータ電流指令値を、

$$i_{sq}^{ref} = \frac{L_{rr}}{M} \frac{T^{ref}}{\lambda_{rd}^{ref}} \dots \dots \dots (95)$$

$$i_{sd}^{ref} = \frac{1}{M} \left(1 + \frac{L_{rr}}{R_r} \frac{d}{dt} \right) \lambda_{rd}^{ref} \dots \dots \dots (96)$$

とすればよい。(95)式と(96)式が直接形ベクトル制御の制御則である。

6.4 間接形ベクトル制御 いわゆる間接形ベクトル制御は、ロータ磁束鎖交数 λ_{rdq} を検出せずに、その指令値に強引に縛りつける制御である。このため、間接形ベクトル制御は、磁束フィードフォワード制御とも呼ばれる。

λ_{rdq} を検出しないで、その指令値 $\lambda_{rdq}^{ref} = \lambda_{rd}^{ref} + j0$ に縛りつけるために、まだ使用していない(90)式の2行目を使う！すなわち、

$$\frac{d}{dt} \lambda_{rq} = -\frac{R_r}{L_{rr}} \lambda_{rq} - (\dot{\theta}_0 - \dot{\theta}') \lambda_{rd} + \frac{R_r M}{L_{rr}} i_{sq} \dots \dots \dots (97)$$

を満たすように $(\dot{\theta}_0 - \dot{\theta}')$ を制御する。仮に $\lambda_{rq} = 0$ の状態を維持できる(残った問題として後で説明する)ものとすれば、上式から、

$$(\dot{\theta}_0 - \dot{\theta}') = \frac{R_r M}{L_{rr}} \frac{i_{sq}^{ref}}{\lambda_{rd}^{ref}} \dots \dots \dots (98)$$

とすればよい。

以上で、間接形ベクトル制御の制御則として、(95)、(96)、(98)式を導出できた。図10に間接形ベクトル制御のブロック図を示す。ただし、図中の記号は、

$$\tau_2 \equiv L_{rr}/R_r, \quad \omega_r \equiv \dot{\theta}', \quad \omega_{sl} \equiv \dot{\theta}_0 - \dot{\theta}' \dots \dots \dots (99)$$

である。

残った問題は、この制御で、本当に $\lambda_{rq} = 0$ の状態を維持できるかどうかである。これを確認するには、次のようにすればよい[†]。ロータ側方程式(90)式に、制御則(95)、(96)、(98)式を代入して整理すると、

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda_{rd}^o - \frac{R_r^o M^o \hat{L}_{rr}^o}{\hat{R}_r \hat{M} L_{rr}^o} \lambda_{rd}^{ref} \\ \lambda_{rq}^o \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{R_r^o}{L_{rr}^o} & \dot{\theta}_0 - \dot{\theta}' \\ -(\dot{\theta}_0 - \dot{\theta}') & -\frac{R_r^o}{L_{rr}^o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{rd}^o - \frac{R_r^o M^o \hat{L}_{rr}^o}{\hat{R}_r \hat{M} L_{rr}^o} \lambda_{rd}^{ref} \\ \lambda_{rq}^o \end{bmatrix} + \\ & \quad \begin{bmatrix} \frac{R_r^o M^o}{L_{rr}^o \hat{M}} \left[1 - \frac{R_r^o / L_{rr}^o}{\hat{R}_r / \hat{L}_{rr}^o} \right] \lambda_{rd}^{ref} \\ 0 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (100) \end{aligned}$$

となる。ただし、パラメータの上添字 o は誘導機内部の実値を表し、ハット[^]は制御器内部の値を表す。

(100)式において、上添字 o とハット[^]がついたものがそれぞれ等しければ、まず、右辺第2項が $[0 \ 0]^T$ となる。このことと、右辺第1項の 2×2 行列の固有値は $-R_r^o/L_{rr}^o \pm j(\dot{\theta}_0 - \dot{\theta}')$ であるゆえに応答が漸的に減衰する^{††}ことから、 $(\lambda_{rd}^o - \lambda_{rd}^{ref}) \rightarrow 0$ 、 $\lambda_{rq}^o \rightarrow 0$ となることが分かる。すなわち、 q 軸成分がなくなる ($\lambda_{rq}^o = 0$ になる) からロータ磁束鎖交数は d 軸に縛りつけられて、その大きさも指令値どおりになる ($\lambda_{rd}^o = \lambda_{rd}^{ref}$) ことを確認できた。

7. PM モータと制御

7.1 永久磁石界磁同期機 (PMモータ) の回路方程式
回転子に永久磁石界磁を有する同期機の回路方程式を次のように求める。

- (1) 電機子巻線が固定子にあるから、図6(b)が適し、(42)を用いる。
- (2) 図6(b)の d 軸巻線は永久磁石界磁であり、それが作る電機子巻線の磁束鎖交数を $\psi \equiv M_d i_{rd}$ とする。
- (3) q 軸巻線はないから除く。

以上と(42)式から回路方程式は、電機子巻線のある固定子 $\alpha\beta$ 座標系では、

$$\begin{bmatrix} v_{s\alpha} \\ v_{s\beta} \end{bmatrix} = R_s \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix} + [A_1] \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix} + [A_2] \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix} + \dot{\theta}' \psi \begin{bmatrix} -\sin \theta' \\ \cos \theta' \end{bmatrix} \dots \dots \dots (101a)$$

$$[A_1] = \begin{bmatrix} L_{s0} + L_{s1} \cos 2\theta' & L_{s1} \sin 2\theta' \\ L_{s1} \sin 2\theta' & L_{s0} - L_{s1} \cos 2\theta' \end{bmatrix} \dots \dots \dots (101b)$$

$$[A_2] = 2\dot{\theta}' L_{s1} \begin{bmatrix} -\sin 2\theta' & \cos 2\theta' \\ \cos 2\theta' & \sin 2\theta' \end{bmatrix} \dots \dots \dots (101c)$$

$$L_{s0} \equiv \ell_s + \frac{L_{sd} + L_{sq}}{2}, \quad L_{s1} \equiv \frac{L_{sd} - L_{sq}}{2} \dots \dots \dots (101d)$$

上式の複素数表記は、複素共役を*で表して、

^{††} 分からなかったら、制御に関する本の「制御系の固有値」を勉強せよ！

[†] 近藤のオリジナル！

$$v_{sa\beta} = R_s i_{sa\beta} + L_{s0} \frac{di_{sa\beta}}{dt} + L_{s1} \exp(j2\theta') \frac{di_{sa\beta}^*}{dt} + 2\dot{\theta}' L_{s1} \exp(j2\theta') j i_{sa\beta}^* + \exp(j\theta') j \dot{\theta}' \psi \dots (102)$$

である^{††† ††††}。上式を図 6(b) の dq 座標系に変換するため、

$$v_{sa\beta} = \exp(j\theta') v_{sdq}, \quad i_{sa\beta} = \exp(j\theta') i_{sdq} \dots \dots \dots (103)$$

を代入すれば、永久磁石界磁とともに回転する dq 座標系での回路方程式は、

$$v_{sdq} = R_s i_{sdq} + L_{s0} \frac{di_{sdq}}{dt} + L_{s1} \frac{di_{sdq}^*}{dt} + j\dot{\theta}' L_{s0} i_{sdq} + j\dot{\theta}' L_{s1} i_{sdq}^* + j\dot{\theta}' \psi \dots \dots (104)$$

となる[†]。上式は 2 次元実数ベクトルで表せば、

$$\begin{bmatrix} v_{sd} \\ v_{sq} \end{bmatrix} = R_s \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ell_s + L_{sd} & 0 \\ 0 & \ell_s + L_{sq} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{bmatrix} + \dot{\theta}' \begin{bmatrix} 0 & -(\ell_s + L_{sq}) \\ \ell_s + L_{sd} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{bmatrix} + \dot{\theta}' \begin{bmatrix} 0 \\ \psi \end{bmatrix} \dots (105)$$

となる。発生トルク式は、(105) 式に (46) 式の下に述べた方法を適用して、

$$T = (L_{sd} - L_{sq}) i_{sd} i_{sq} + \psi i_{sq} \dots \dots \dots (106)$$

となる。なお、回転機の極対数が p のときは (48) 式を適用する。

7・2 予 告 編 PM モータのベクトル制御, 高効率化制御, 磁束制御, 弱め界磁制御, さらには, 位置センサレス制御などなど。。 乞うご期待 !! 次号を待て !!
(平成 15 年 3 月 27 日受付, 同 17 年 11 月 08 日再受付)

文 献

- (1) 難波江, 金, 高橋, 中村, 山田: 「基礎電気機器学」, 電気学会, 1984
- (2) 山村: 「電気回路と回転機の解析と制御 スパイラルベクトル理論」, オーム社, 1998
- (3) 杉浦光夫: 基礎数学 2 解析入門, 東京大学出版会, 1980
- (4) 研究ノート: file name == NoteD14P2.doc

来 歴

- 2005/11/07 安本氏の指摘により, 式 (104) 右辺最後から 2 つ目の添字修正。
- 2003/04/25 電気学会クラス [2003/01/14 v2.1] 修正版 ieejSK.cls 使用

^{†††} 研究ノート D-12 pp.50-52
^{††††} (102) 式の右辺の $i_{sa\beta}^*$ に注目せよ。こいつは, $i_{sa\beta}$ と逆方向に回転する。こいつがあるから位置センサレス。。。
[†] 研究ノート D-13 pp.40-41